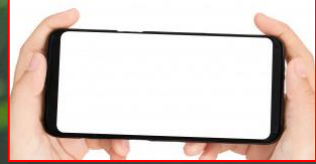
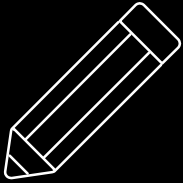


Aula 5 – 2º Bim

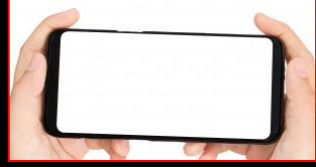


CÁLCULO NUMÉRICO ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

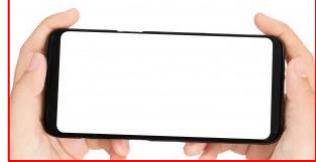




Aula 5 – 2º bim.

- ✓ Equações diferenciais;
- ✓ **Revisão de C.3: Definição, exemplos e classificação;**
- ✓ **Solução analítica;**
- ✓ **Interpretação gráfica;**

Equação diferencial – Definição



2.1 Definição

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de *equação diferencial*.

Equação diferencial – Exemplos



$$(1) (e^{-y} + 1)\sin(x)dx = (1 + \cos(x))dy \quad y(0) = 0$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

$$(3) e^x y y' = e^{-y} + e^{-2x-y}$$

$$(4) (y'')^2 + 4y = 0$$

$$(5) \frac{d^2 y}{dx^2} - e^{3x} - \cos(x) = x^3 - x^2 \quad y(0) = 0 \text{ e } y'(\pi) = 0$$

$$(6) \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x.e^x$$

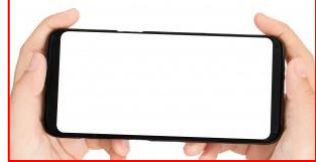
Equação diferencial – Classificação



Havendo uma só variável independente, as derivadas são ordinárias e a equação é denominada *equação diferencial ordinária*, exemplos (1) à (7).

Havendo duas ou mais variáveis independentes, as derivadas são parciais e a equação é denominada *equação diferencial parcial*, exemplo (8). Neste livro, não estudaremos tais equações.

Equação diferencial – Ordem



A *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela aparece. As equações (1), (2) e (3) são de primeira ordem; (4), (5) e (7) são de segunda ordem e (6) é de terceira ordem.

Equação diferencial – Classificação



O *grau* de uma equação diferencial, que pode ser escrita, considerando as derivadas como um polinômio, é o grau da derivada de mais alta ordem que nela aparece. Todas as equações dos exemplos acima são do primeiro grau, exceto (4) que é do segundo grau.

Equação diferencial – Soluções



Geral

Particular

Equação diferencial – Tipo



Equações Diferenciais Ordinárias	
1ª. Ordem	1.1 Variáveis separáveis
	1.2 Homogêneas
	1.3 Exatas
	1.4 Não-exatas
	1.5 Lineares
	1.6 Envolvendo sistemas
2ª. Ordem	2.1 $y'' = f(x)$
	2.2 $y'' = f(x, y')$
	2.3 $y'' = f(y)$
	2.4 $y'' = f(y, y')$



Ordem n

$$(A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B(x))$$

3.1 Coeficientes constantes ($A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A_0$)

3.1.1 $B(x) = 0$ (equação homogênea)

3.1.1.1 Raízes reais

3.1.1.2 Raízes repetidas

3.1.1.3 Raízes complexas

3.1.2 $B(x) = f(x)$

3.1.2.1 $B(x) = \text{polinômio}$

3.1.2.2 $B(x) = e^{kx}$

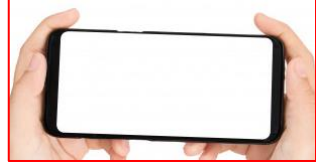
3.1.2.3 $B(x) = \sin(kx)$ ou $\cos(kx)$

3.1.2.4 Todos os casos juntos

3.2 Coeficientes não - constantes

3.2.1 Séries de potências

E. D. – Exemplo Resolvido



Encontrar a solução geral da EDO: $2y \frac{dy}{dx} = -4x$

A EDO pode ser reescrita como: $\frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} = -4x$

ou pela regra da cadeia: $\frac{d}{dx}(y^2) = -4x$

Assim a solução geral é dada implicitamente por:

$$y^2 = \int (-4x) dx = -2x^2 + C$$

As soluções são elipses (ver fig. 1) que são curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = y^2 + 2x^2$$

E. D. – Exemplo Resolvido



a) Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

E. D. – Exemplo Resolvido



(a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2 - 3)y' = 2x - 1$$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos

$$\int (3y^2 - 3)y' dx = \int (2x - 1)dx + C.$$

Fazendo a substituição $y' dx = dy$ obtemos

$$\int (3y^2 - 3) dy = \int (2x - 1)dx + C.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

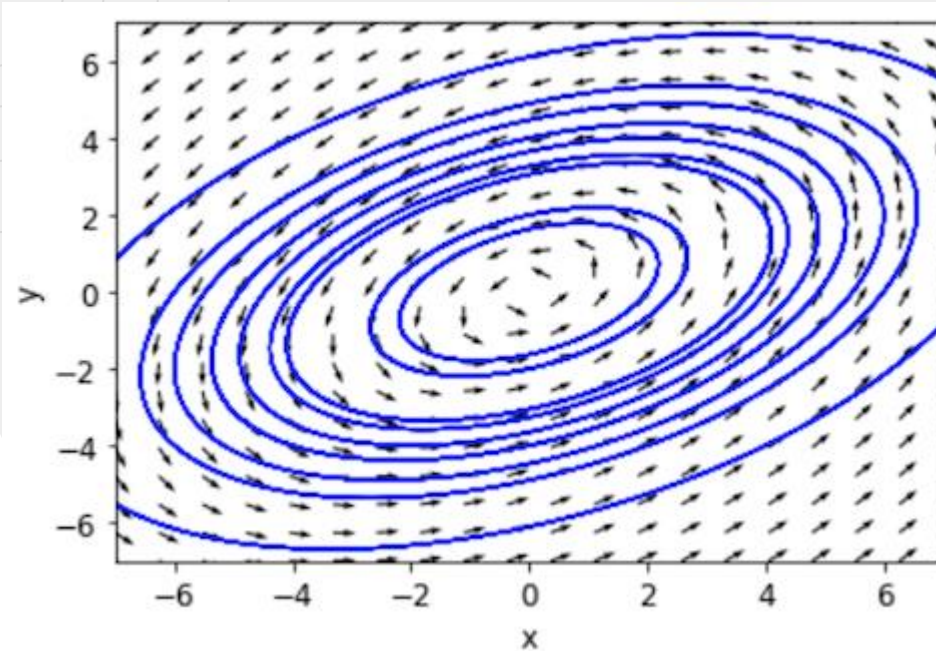
$$y^3 - 3y = x^2 - x + C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$ substituímos $x = 1$ e $y = 0$ na solução geral obtendo $C = 0$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 + x = 0$$

E. D. – Interpretação Gráfica

Campo de Vetores
Retrato de fases



E. D. O.: Aplicação



O modelo mais simples de **crescimento populacional** é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional a população presente naquele instante $y(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

onde k é uma constante positiva.

E. D. O.: Aplicação



Essa equação é separável e pode ser resolvida obtendo a solução:

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Exemplo: Em uma cultura, há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $(3/2)N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

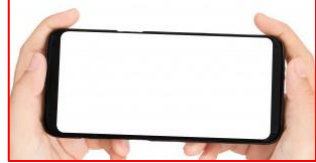


4. Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m , ou seja, a temperatura do corpo, $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_o \end{cases}.$$

Método Numérico Por quê?



A razão mais forte de introduzirmos métodos numéricos para aproximar soluções de problemas de valor inicial (PVI) é a dificuldade de se encontrar, analiticamente, as soluções da equação. Em muitos casos, a teoria nos garante existência e unicidade de solução, mas não sabemos qual é a expressão analítica desta solução.

Os métodos que estudaremos aqui se baseiam em:

dado o PVI:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

construímos $x_1, x_2, \dots, x_n$ que, embora não necessariamente, para nós serão igualmente espaçados, ou seja: $x_{i+1} - x_i = h, i = 0, 1, \dots$, e calculamos as aproximações $y_i \approx y(x_i)$ nestes pontos, usando informações anteriores.

Métodos numéricos:



Problemas de Valor Inicial	
8.2.1 Métodos de Passo Um (ou Passo Simples)	
8.2.2 Métodos de Passo Múltiplo	
8.2.3 Métodos de Previsão-Correção	
Equações de Ordem Superior	
Problemas de Valor de Contorno – O Método das Diferenças Finitas .	

Método de Passo Um



MÉTODO DE EULER

Um método numérico que podemos aplicar à solução aproximada de um PVI: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ é o *método de Euler*, o qual consiste em: como conhecemos x_0 e $y_0 = y(x_0)$, então sabemos calcular $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Assim, a reta que passa por (x_0, y_0) com coeficiente angular $y'(x_0)$, $r_0(x)$ é conhecida:

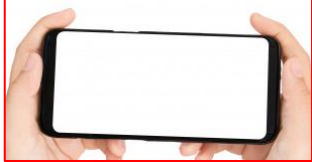
$$r_0(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0)$$

Escolhido $h = x_{k+1} - x_k$, $y(x_1) \approx y_1 = r_0(x_1) = y_0 + hy'(x_0)$, ou seja,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

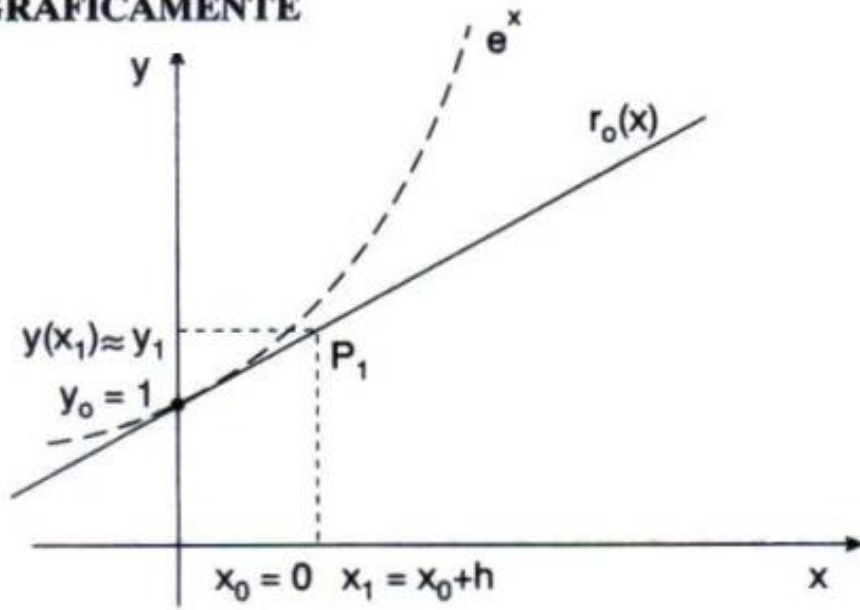
O raciocínio é repetido com (x_1, y_1) e $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ e assim, sucessivamente, o método de Euler nos fornece $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Método de Euler



Atenção: Este é um método de série de Taylor de ordem 1

GRAFICAMENTE



Próximo Ponto:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n$$

Erro:

$$e(x_{n+1}) = \frac{y''(\xi_{x_{n+1}})}{2} h^2$$

Tamanho do Passo - h:

$$|e(x_n)| \leq \max_{x \in I} |e(x)| \leq \frac{M_{k+1} h^{k+1}}{(k+1)!} = Ch^{k+1}$$

Método de Taylor



Para aplicar o método de Taylor de ordem k :

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + \frac{y''_n}{2!} h^2 + \dots + \frac{y_n^{(k)}}{k!} h^k \text{ temos de calcular } y''_n, y'''_n, \dots, y_n^{(k)}$$

Agora,

$$y'(x) = f(x, y(x)). \text{ Então}$$

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = f_x + f_y f \text{ em uma notação simplificada.}$$

Assim, por exemplo, o método de série de Taylor de 2ª ordem é

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)], \quad n = 0, 1, \dots$$

Série de Taylor & Maclaurin (a = 0)



$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Exemplo: Método de Euler



Resolver o PVI abaixo, usando 4 casa decimais para aproximar $y(0,04)$

com $\varepsilon < 0,0005$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Até a
próxima aula