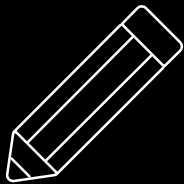
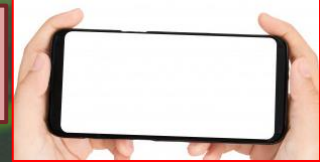


Aula 2 – 2º Bim

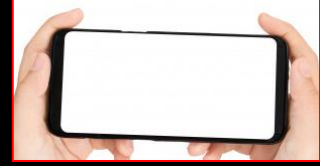


CÁLCULO NUMÉRICO

ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



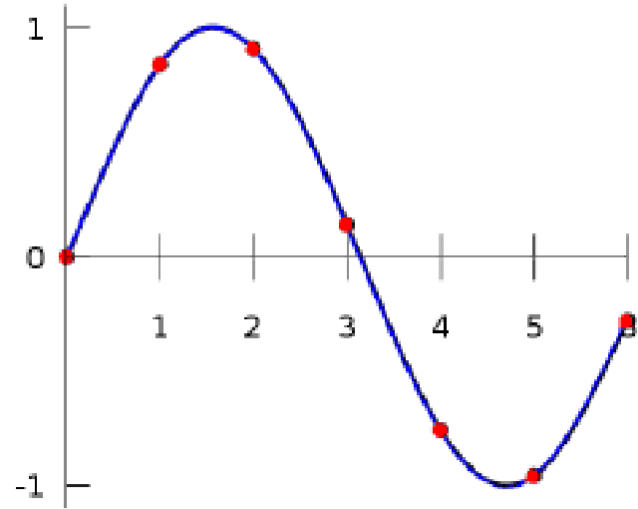
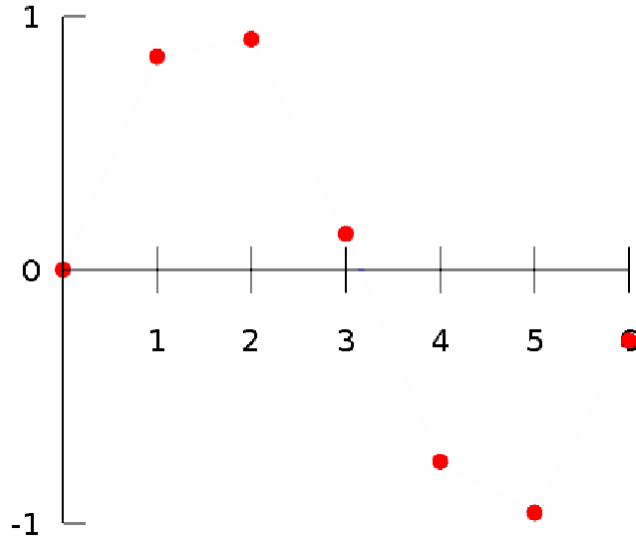
A 2 – 2 ° Bim.

- 1. Interpolação Polinomial:**
Por sistema;
Forma de Lagrange;
Forma de Newton;

Interpolação Polinomial



- Na interpolação busca-se um polinômio $y = p(x)$ tal que todos os dados x_i e y_i satisfaçam o polinômio: $y_i = p(x_i)$;



Interpolação Polinomial (Int. P.)



temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

Suponhamos que se queira calcular:

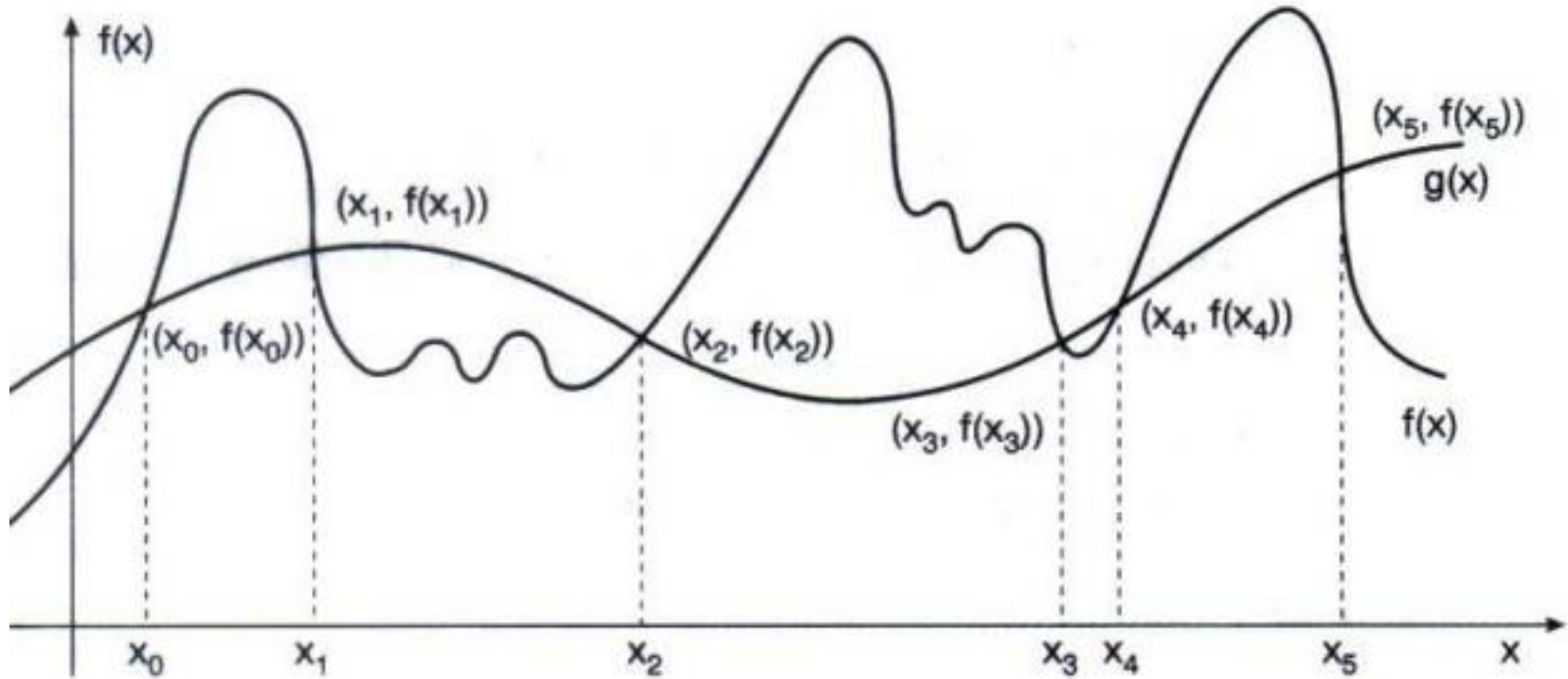
- i) o calor específico da água a 32.5°C ;
- ii) a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837.

Interpolação Polinomial (Int. P.)

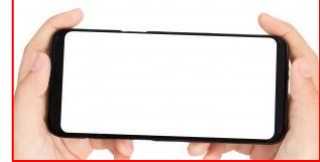


Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades.

Interpolação Polinomial (Int. P.)



(Int. P) Por Sistemas Lineares



consiste em obter os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)$,

$\forall k = 0, 1, 2, \dots, n$, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

com $(n + 1)$ equações e $(n + 1)$ variáveis: $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Exercício 1



Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Temos que $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$;

$$p_2(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$$

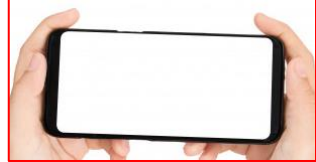
$$p_2(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_0 = 1$$

$$p_2(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1.$$

Resolver o sistema Linear:

$$S = \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 + 0a_1 + 0a_2 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Exercício 1

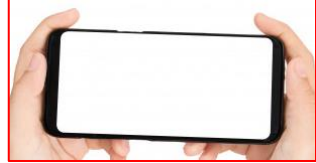


Sabendo que a função

$$f(x) = -e^x + \textit{sen}\left(-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)$$

tem uma raiz entre em $I = [-6, -4]$. Calcule-a através de uma interpolação: a) linear, e b) quadrática (use 2 casas após a vírgula).

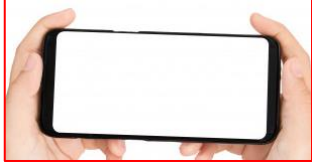
Exercício 2



Encontre o polinômio que interpola os pontos abaixo, use o symbolab para resolver o sistema linear, depois calcule y quando $x = 3$.

x	-3	-1	2	5
y	5	0	-2	3

Int. P) Forma de Lagrange



$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i.$$

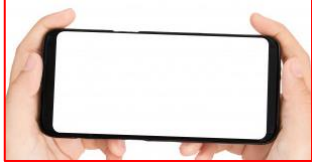
$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases} \text{ e, para isso, definimos } L_k(x) \text{ por}$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$



Int. P) Forma de Lagrange



É fácil verificar que realmente

$$L_k(x_k) = 1 \text{ e } L_k(x_i) = 0 \text{ se } i \neq k.$$

Além disso, para $x = x_i$, $i = 0, \dots, n$ temos:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$

Então, a forma de Lagrange é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}$$



Exercício 3

Encontre $P_2(x)$ que interpola os pontos, use a Forma de Lagrange.

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1



Exercício 2



Encontre o polinômio que interpola os pontos abaixo, use o symbolab para resolver as contas, depois calcule y quando $x = 3$.

x	-3	-1	2	5
y	5	0	-2	3

Int. P) Forma de Newton

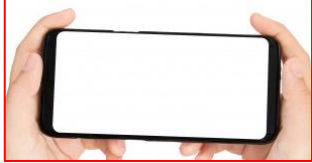


A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos é a seguinte:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ + d_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}).$$



Operador Diferença Dividida



$$f[x_0] = f(x_0) \quad (\text{Ordem Zero})$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{Ordem 1})$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (\text{Ordem 2})$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \quad (\text{Ordem 3})$$

$$(\dots) \quad (\text{Ordem } n)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$



Operador Diferença Dividida Método Prático

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.		$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.					
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	-1	-2



O.D.D. Exemplo Método Prático

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		-1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

Exercício 4

Encontre $P_2(x)$ que interpola os pontos, use a Forma de Lagrange.

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1



Exercício 2



Encontre o polinômio que interpola os pontos abaixo, use o symbolab para resolver as contas, depois calcule y quando $x = 3$.

x	-3	-1	2	5
y	5	0	-2	3



Até a
próxima aula