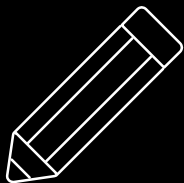


Aula 1 – 2º bim.



CÁLCULO NUMÉRICO

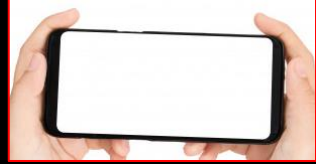
ENG. DE ALIMENTOS

2022/01



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

Aula



1. Sistema Linear (SL): Revisão:
 - Notação Matricial;
 - Método de Cramer;
2. (SL) Eliminação De Gauss.
3. (SL) Fatoração LU



//

SISTEMAS LINEARES

SISTEMAS LINEARES



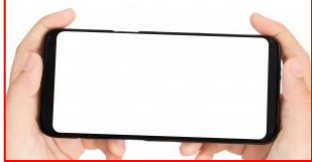
O que é um S.L.?

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

SISTEMAS LINEARES



$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

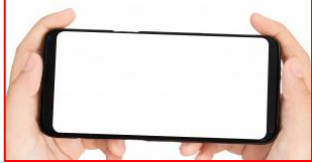
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

é o vetor das variáveis

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

é o vetor constante.

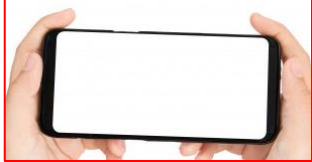
Sistemas Lineares



Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

- i) trocar duas equações;
- ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ e os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes.



(SL): Métodos de Cramer

- Usa os determinantes

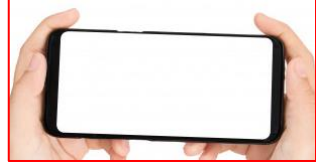
$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{Det}(\mathbf{Ax}_i)}{\mathbf{Det}(\mathbf{A})} \text{ Para } i = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathbf{Det}(\mathbf{Ax}_i) =$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



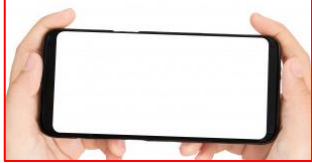
(SLT) Sist. Lineares Triangulares



Seja o sistema linear $Ax = b$, onde A : matriz $n \times n$, triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero. Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

(SLT) Sist. Lineares Triangulares



Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

x_{n-1} pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente obtém-se x_{n-2} , ..., x_2 e finalmente x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

(SLT) Sist. Lineares Triangulares

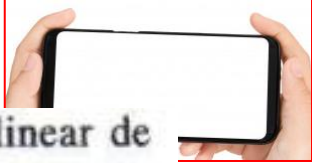


Exemplo: Resolva os sistemas, use o passo-a-passo do SLT:

$$\begin{cases} y_1 &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$$

(MEG) Método Eliminação de Gauss

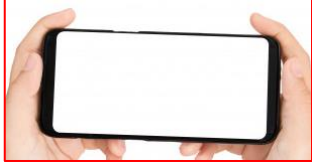


Considerando que $\det(A) \neq 0$, é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{11} seja diferente de zero, usando apenas a operação elementar (i):

$$\text{Seja } A^{(0)} | b^{(0)} = A | b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots\dots\dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots\dots\dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots\dots\dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array} \right)$$

onde $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$ e $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

(SL) Eliminação de Gauss



Etapa 1

A eliminação da variável x_1 das equações $i = 2, \dots, n$ é feita da seguinte forma: da equação i subtraímos a 1ª equação multiplicada por m_{i1} . Observamos que para que esta eliminação seja efetuada, a única escolha possível é $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \dots, n$.

Os elementos $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \dots, n$ são os *multiplicadores* e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é denominado *pivô* da 1ª etapa.

(SL) Eliminação de Gauss

Etapa 1

Ao final desta etapa teremos a matriz:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots\dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots\dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots\dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

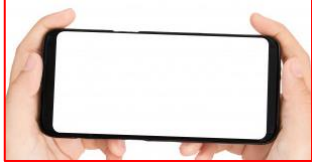
$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ \text{e } j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \quad i = 2, \dots, n$$



(SL) Eliminação de Gauss



Etapa 2

Deve-se ter pelo menos um elemento $a_{i2}^{(1)} \neq 0$, para $i = 2, \dots, n$, caso contrário, $\det(A^{(1)}) = 0$, o que implica que $\det(A) = 0$; mas $\det(A) \neq 0$, por hipótese.

Então, é sempre possível reescrever a matriz $A^{(1)}$, sem alterar a posição da linha 1, de forma que o pivô, $a_{22}^{(1)}$, seja não nulo.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ para $i = 3, \dots, n$.

A variável x_2 é eliminada das equações $i = 3, \dots, n$ da seguinte forma: da equação i subtraímos a segunda equação multiplicada por m_{i2} .

(SL) Eliminação de Gauss

Etapa 2

Ao final, teremos a matriz $A^{(2)} \mid b^{(2)}$:

$$A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } j = i, i+1, \dots, n$$

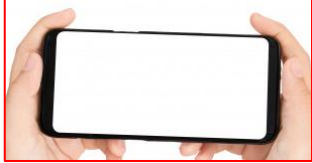
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} \text{ para } i = 1, 2$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n \text{ e } j = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n$$



(SL) Eliminação de Gauss



Etapa (n-1)

$$A^{(n-1)} \mid b^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

e o sistema linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

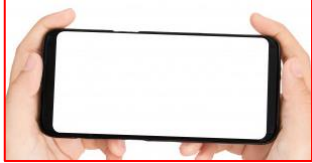
(SL) Eliminação de Gauss



Exemplo: Resolva o sistema, use o passo-a-passo do MEG:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

(SL) Fatoração LU



Dados o sistema linear $Ax = b$ e a fatoração LU da matriz A , temos:

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b$$

Seja $y = Ux$. A solução do sistema linear pode ser obtida da resolução dos sistemas lineares triangulares:

i) $Ly = b$

ii) $Ux = y$

Verifiquemos teoricamente que o vetor y é o vetor constante do lado direito obtido ao final do processo da Eliminação de Gauss.

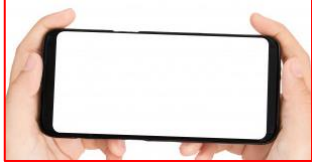
(SL) Fatoração LU



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = LU$$

U = UPPER = Superior
L = Lower = Inferior

(SL) Fatoração LU



Exemplo: Resolva o sistema, use o passo-a-passo da F. LU

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$



Até a
próxima aula