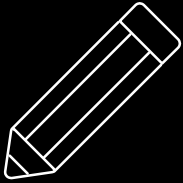
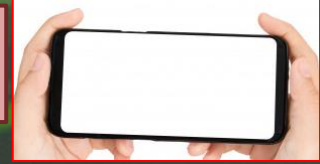


Aula 2 – 2º Bim.



CÁLCULO NUMÉRICO

ENG. DE ALIMENTOS



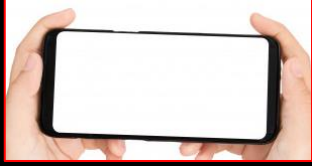
Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

A 2 – 2º Bim.

1. Sistema Linear (SL):

Métodos iterativos:

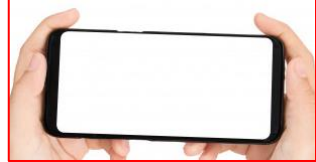
- Método Gauss Jacobi
- Método Gauss Seidel





S.L. Métodos Iterativos

(SL) Métodos Iterativos



Este sistema é convertido, de alguma forma, num sistema do tipo $x = Cx + g$ onde C é matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$. Observamos que $\varphi(x) = Cx + g$ é uma função de iteração dada na forma matricial.

É então proposto o esquema iterativo:

Partimos de $x^{(0)}$ (vetor aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores:

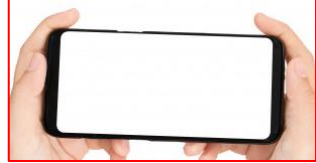
$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)}), \quad (\text{primeira aproximação}),$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)}), \quad (\text{segunda aproximação}) \text{ etc.}$$

De um modo geral, a aproximação $x^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, ou seja, $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$

É importante observar que se a sequência de aproximações $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ é tal que, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$, então $\alpha = C\alpha + g$, ou seja, α é solução do sistema linear $Ax = b$.

(SLI) Método de Gauss-Jacobi (MGJ)



A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear $Ax = b$ em $x = Cx + g$ é a seguinte:

Tomamos o sistema original:

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear $Ax = b$ é escrito na forma equivalente $x = Cx + g$ por separação da diagonal.

O processo iterativo consiste em, sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ por:

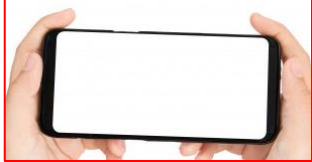
$$\begin{cases} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e supondo $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, isolamos o vetor x mediante a separação pela diagonal, assim:

(SLI) Método de Gauss-Jacobi (MGJ)



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{array} \right.$$



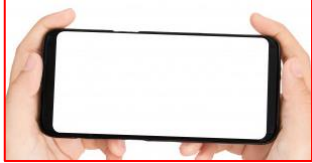
(SLI) Método de Gauss-Jacobi (MGJ)

Desta forma, temos $x = Cx + g$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(1)}$..., $x^{(k)}$... através da relação recursiva $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$:

(SLI) Método de Gauss-Jacobi (MGJ)



Critério de Parada

O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

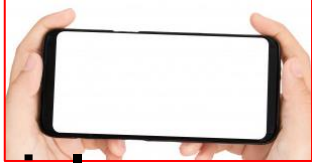
Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por $d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$.

Assim, dada uma precisão ϵ , o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como $\bar{x}$, solução aproximada da solução exata, se $d^{(k)} < \epsilon$.

Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções, podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}.$$

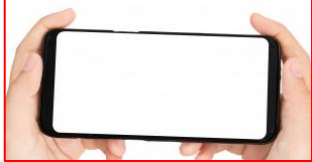
(SLI) Método de Gauss-Jacobi (MGJ)



Resolva o Sistema, pelo MGJ, $\varepsilon < 0.05$, use a solução inicial.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$



(SLI) Método de Gauss-Seidel

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear $Ax = b$ é escrito na forma equivalente $x = Cx + g$ por separação da diagonal.

O processo iterativo consiste em, sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{array} \right.$$

(SLI) Método de Gauss-Seidel



Portanto, no processo iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular $x_j^{(k+1)}$ usamos todos os valores $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ restantes.

Vamos aplicar o método (MGS) para o S.L., com o passo inicial e erros dados:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

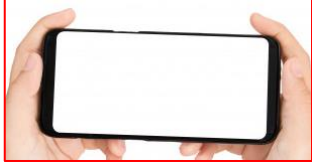
$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \varepsilon = 5 \times 10^{-2}.$$

Exemplo MGS:

O processo iterativo é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 \times 1 - 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 0.75 = -0.875 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix},$$



Exemplo MGS:



$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.75$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.875.$$

$$\Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = 1 > \varepsilon$$

Exemplo MGS:

Assim, ($k = 1$) e

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0.2 \times 0.75 + 0.2 \times 0.875 = 1.025 \\ x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 \times 1.025 - 0.25 \times (-0.875) = 0.95 \\ x_3^{(2)} = -0.5 \times 1.025 - 0.5 \times 0.95 = -0.9875 \end{cases}$$

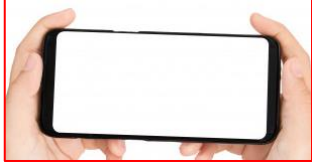
$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.20 \quad \Rightarrow \quad d_r^{(2)} = \frac{0.2}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.1125$$

Exemplo MGS:



Continuando as iterações obtemos:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = 0.0409 < \varepsilon.$$

Assim, a solução $\bar{x}$ do sistema linear é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix}.$$



Até a
próxima aula