16. $x = 2 + \cos \pi yz,\ y = 1 + \operatorname{sen} \pi xz;\ (3, 1, 2)$
17. $y = e^x \operatorname{sen} 2\pi z + 2,\ z = y^2 - \ln(x + 1) - 3;\ (0, 2, 1)$
18. $x^2 - 3xy + y^2 = z,\ 2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0;\ (1, -2, 11)$
19. $x^2 + z^2 + 4y = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0;\ (0, -1, 2)$
20. $x^2 + y^2 + z^2 = 8,\ yz = 4;\ (0, 2, 2)$
21. Mostre que as esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{e} \quad (x - b)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$$

são tangentes no ponto $(a, 0, 0)$.

22. Mostre que as superfícies $xyz = 36$ e $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$ são tangentes no ponto $(3, 6, 2)$.
23. Duas superfícies são *perpendiculares* em um ponto P_0 de intersecção se os vetores normais às superfícies em P_0 forem ortogonais. Mostre que a superfície $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ é perpendicular a todo membro da família de superfície $x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$ no ponto $(1, -1, 2)$.
24. Prove que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ passa pelo centro da esfera.

17.3 EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Uma aplicação importante da derivada de uma função de uma única variável consiste no estudo dos valores extremos de uma função que nos leva a uma variedade de problemas envolvendo máximos e mínimos. Isso foi discutido no Capítulo 4, onde provamos teoremas envolvendo as derivadas primeira e segunda, a partir dos quais os valores máximos e mínimos relativos de uma função foram determinados. Ao estender a teoria para funções de duas variáveis, você verá que ela é similar ao caso de uma variável; contudo, algumas complicações aparecem.

17.3.1 DEFINIÇÃO A função f de duas variáveis tem um **valor máximo relativo** no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ para todo (x, y) em B.

17.3.2 DEFINIÇÃO A função f de duas variáveis tem um **valor mínimo relativo** no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ para todo (x, y) em B.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 1 está o gráfico da função f definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Seja B qualquer disco aberto $((0, 0); r)$ onde $r \leqslant 5$. Da Definição 17.3.1, segue que f tem um valor máximo relativo de 5 no ponto onde $x = 0$ e $y = 0$.

Na Figura 2 aparece um esboço do gráfico da função g para a qual

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Seja B qualquer disco aberto $((0, 0); r)$. Então, da Definição 17.3.2, g tem um valor mínimo relativo de 0 na origem. ◀

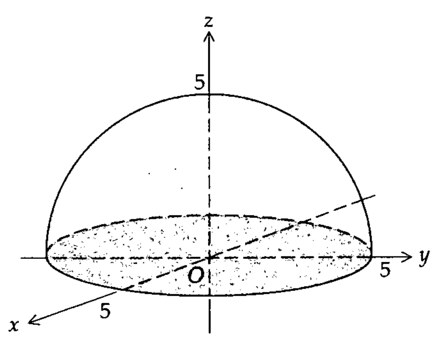

FIGURA 1

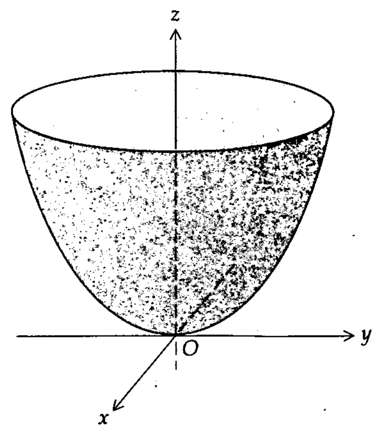

FIGURA 2

Análogo ao Teorema 4.1.3 para funções de uma variável, existe o seguinte teorema para funções de duas variáveis.

17.3.3 TEOREMA Seja $f(x, y)$ definida em todos os pontos de algum disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e tendo um extremo relativo em (x_0, y_0). Então, se existirem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, teremos

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

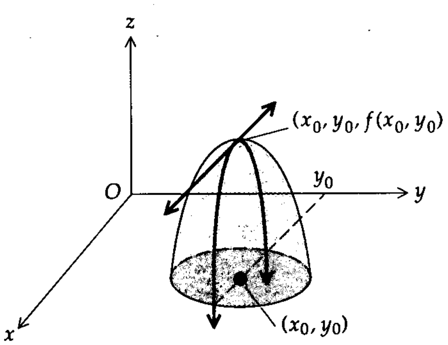

FIGURA 3

Antes de demonstrar o Teorema 17.3.3, vamos dar um argumento geométrico informal. Seja f uma função satisfazendo as hipóteses e suponha que f tenha um valor máximo relativo em (x_0, y_0). Considere a curva de intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ (consulte a Figura 3). Essa curva é representada pelas equações

$$y = y_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y)$$

Como f tem um valor máximo relativo no ponto onde $x = x_0$, $y = y_0$, segue que essa curva tem uma reta tangente horizontal no plano $y = y_0$, em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A inclinação dessa reta tangente $f_x(x_0, y_0)$; assim $f_x(x_0, y_0) = 0$. De uma forma similar podemos considerar a curva de intersecção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ e obter $f_y(x_0, y_0) = 0$. Uma discussão similar pode ser feita se f tiver um valor mínimo relativo em (x_0, y_0). A seguir está a demonstração formal.

Prova do Teorema 17.3.3 Vamos provar que se f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0) e se $f_x(x_0, y_0)$ existir, então $f_x(x_0, y_0) = 0$. Pela definição da derivada parcial,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Como f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0), pela Definição 17.3.1,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leqslant 0$$

sempre que Δx for suficientemente pequeno, de tal forma que $(x_0 + \Delta x, y_0)$ esteja em B. Se Δx tender a zero pela direita, $\Delta x > 0$; logo,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leqslant 0$$

Assim, pelo Teorema 2.10.3, se $f_x(x_0, y_0)$ existir, $f_x(x_0, y_0) \leqslant 0$.

Analogamente, se Δx tender a zero pela esquerda, $\Delta x < 0$ e

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geqslant 0$$

Logo, pelo Teorema 2.10.4, se $f_x(x_0, y_0)$ existir, $f_x(x_0, y_0) \geqslant 0$. Concluímos, então, que, existindo $f_x(x_0, y_0)$, ambas as desigualdades, $f_x(x_0, y_0) \leqslant 0$ e $f_x(x_0, y_0) \geqslant 0$, devem ser válidas. Conseqüentemente, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

A demonstração de que $f_y(x_0, y_0) = 0$ se $f_y(x_0, y_0)$ existir e f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0), é análoga e será deixada como exercício (veja o Exercício 37). A demonstração do teorema quando $f(x_0, y_0)$ for um valor mínimo relativo também será deixada como exercício (veja o Exercício 38). ■

17.3.4 DEFINIÇÃO Um ponto (x_0, y_0) para o qual temos ambas as igualdades $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, é chamado de **ponto crítico**.

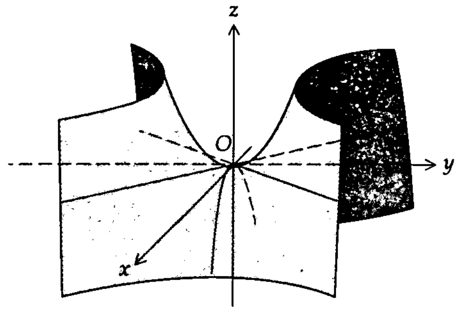

FIGURA 4

O Teorema 17.3.3 estabelece que uma condição necessária para que uma função de duas variáveis tenha um extremo relativo em um ponto, onde suas derivadas parciais primeiras existem, é que ele seja um ponto crítico. É possível, para uma função de duas variáveis, ter um extremo relativo em um ponto no qual as derivadas parciais não existem, mas não iremos considerar tal situação neste livro. Além disso, a anulação das derivadas parciais primeiras de uma função de duas variáveis não é uma condição suficiente para que a função tenha um extremo relativo no ponto. Isso ocorre na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja f a função definida por

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Então,

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

Ambas, $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$, são nulas. Um esboço do gráfico de f aparece na Figura 4; os pontos próximos à origem dão ao gráfico uma forma de sela. É claro que f não satisfaz as Definições 17.3.1 ou 17.3.2 quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$. ◀

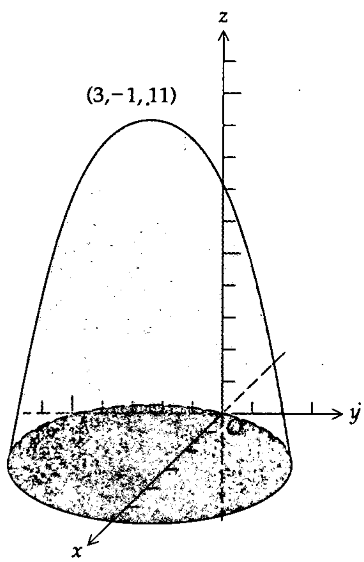

FIGURA 5

Na Ilustração 2, o ponto (0, 0) é chamado de *ponto de sela* da função f.

Há um teste da derivada segunda que dá condições que garantem a existência de extremos relativos para uma função em um ponto onde suas derivadas parciais são nulas. Contudo, algumas vezes é possível determinar os extremos de uma função pelas Definições 17.3.1 e 17.3.2, conforme está mostrado na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja f a função definida por

$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

Vamos determinar se f tem algum extremo relativo.

Como f e suas derivadas parciais existem em todo (x, y) em R^2, o Teorema 17.3.3 é aplicável. Derivados, obtemos

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

Expressando $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ iguais a zero, obtemos $x = 3$ e $y = -1$. Veja a Figura 5 para um esboço do gráfico da equação

$$z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

É um parabolóide tendo um eixo vertical, com vértice em $(3, -1, 11)$ e abrindo para baixo. Podemos concluir que $f(x, y) \leqslant f(3, -1)$ para todo (x, y); logo, pela Definição 15.3.1, $f(3, -1) = 11$ é um valor máximo relativo da função. ◀

O teste básico para determinar máximos e mínimos para funções de duas variáveis é o teste da derivada segunda, dado no teorema a seguir.

17.3.5 TEOREMA
Teste da Derivada Segunda

Seja f uma função de duas variáveis, tal que f e suas derivadas primeira e segunda sejam contínuas em algum disco aberto $B((a, b); r)$. Suponhamos, além disso, que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$. Então,

(i) f tem um valor mínimo relativo em (a, b) se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \text{ (ou } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tem um valor máximo relativo em (a, b) se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \text{ (ou } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ não é um extremo relativo se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$$

(iv) Não podemos tirar conclusão nenhuma se

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) = 0.$$

Adiaremos a discussão da prova do teste da derivada segunda até o final desta secção, onde provaremos a parte (i).

EXEMPLO 1 Se

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

determine, caso haja, os extremos relativos de f.

Solução Para aplicar o teste da derivada segunda, calculamos primeiro as derivadas primeira e segunda de f.

$$f_x(x, y) = 8x^3 - 2x \qquad f_y(x, y) = 2y - 2$$

$$f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2 \qquad f_{yy}(x, y) = 2 \qquad f_{xy}(x, y) = 0$$

Resolvendo $f_x(x, y) = 0$, obtemos $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Resolvendo agora $f_y(x, y) = 0$, obtemos $y = 1$. Logo, f_x e f_y são ambas nulas nos pontos $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(0, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$ e esses são os pontos críticos de f. Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda a esses pontos estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	*Conclusão*
$(-\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tem um valor mínimo relativo
$(0, 1)$	−2	2	0	−4	f não tem um extremo relativo
$(\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tem um valor mínimo relativo

No ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$, $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$; assim, do Teorema 17.3.5 (i), f tem um valor mínimo relativo em $(-\frac{1}{2}, 1)$. Em $(0, 1)$, $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$; assim, do Teorema 17.3.5 (iii), f não tem extremo relativo em $(0, 1)$. Como $f_{xx} > 0$ e $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em $(\frac{1}{2}, 1)$, f tem um valor mínimo relativo nesse ponto pelo Teorema 17.3.5(i).

Como $f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$ e $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$, concluímos que f tem um valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$ em cada um dos pontos $(-\frac{1}{2}, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$.

Vamos discutir agora extremos absolutos de funções de duas variáveis.

17.3.6 DEFINIÇÃO

A função f de duas variáveis terá um **valor máximo absoluto** em seu domínio D, no plano xy, se existir algum ponto (x_0, y_0) em D, tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D. Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor máximo absoluto de f em D.

17.3.7 DEFINIÇÃO

A função f de duas variáveis terá um **valor mínimo absoluto** em seu domínio D, no plano xy, se existir algum ponto (x_0, y_0) em D, tal que $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D. Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor mínimo absoluto de f em D.

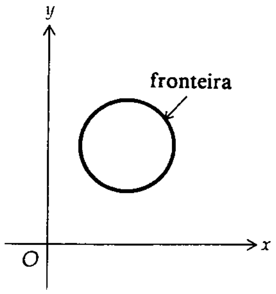

FIGURA 6

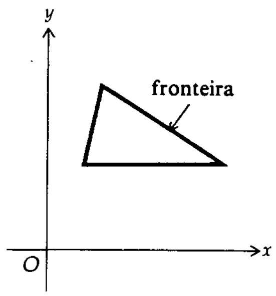

FIGURA 7

Para funções de uma única variável, tínhamos o teorema do valor extremo: Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$. Sabemos que um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um valor funcional extremo relativo ou um valor funcional na fronteira do intervalo. Temos uma situação correspondente para funções de duas variáveis. No enunciado do teorema do valor extremo para funções de duas variáveis, vamos nos referir a uma *região fechada*, no plano xy. Por **região fechada** entendemos aquela que inclui sua *fronteira*. Na ilustração a seguir damos algumas regiões fechadas e identificamos a fronteira de cada região.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** (a) Um disco fechado é uma região fechada. A fronteira é a circunferência do disco. Veja a Figura 6.

(b) Os lados de um triângulo, juntamente com a região contida nele, constituem uma região fechada. A fronteira consiste nos lados do triângulo. Veja a Figura 7.

(e) Os lados de um retângulo, juntamente com a região contida nele, constituem uma região fechada. A fronteira consiste nos lados do retângulo. Veja a Figura 8.* ◀

17.3.8 TEOREMA
Teorema do Valor Extremo para Funções de Duas Variáveis

Seja R uma região fechada no plano xy, e seja f uma função de duas variáveis contínua em R. Então, existe pelo menos um ponto em R onde f tem um valor máximo absoluto, e pelo menos um ponto em R onde f tem um valor mínimo absoluto.

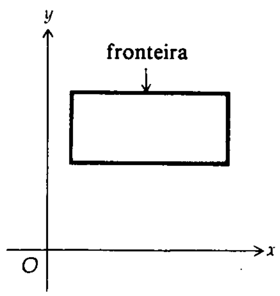

FIGURA 8

A demonstração desse teorema será omitida, pois foge ao contexto deste livro.

Se f for uma função satisfazendo o Teorema 17.3.8 e se ambas $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existirem em todos os pontos de R, então os extremos de f ocorrerão num ponto (x_0, y_0), onde $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, ou num ponto da fronteira de R.

EXEMPLO 2 Um fabricante que é um monopolista fabrica dois tipos de lâmpadas. De sua experiência, o fabricante determinou que se x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo forem feitas, cada uma delas poderá

* **N. do R.**: Um ponto P será da fronteira de R, denotada pelo símbolo ∂R, se satisfizer a seguinte propriedade: toda bola $B(P, r)$ centrada em P, com $r > 0$, contém pontos de R e de seu complemento. O ponto Q será interior a R, denotado por $\overset{\circ}{R}$, se satisfizer a seguinte propriedade: existe uma bola $B(Q, r)$ centrada em Q, com $r > 0$, totalmente contida em R. É claro então que $R = \overset{\circ}{R} \cup \partial R$ e $\partial R \cap \overset{\circ}{R} = \varnothing$.

ser vendida pelos valores $(100 - 2x)$ e $(125 - 3y)$, respectivamente.* O custo de fabricação de x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo é de $(12x + 11y + 4xy)$. Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que ele obtenha o lucro máximo, e qual é o lucro máximo?

Solução A renda obtida com a venda das lâmpadas do primeiro tipo é $x(100 - 2x)$, e com as lâmpadas do segundo tipo é $y(125 - 3y)$. Logo, se $f(x, y)$ for o lucro do fabricante,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(100 - 2x) + y(125 - 3y) - (12x + 11y + 4xy) \\ &= 88x + 114y - 2x^2 - 3y^2 - 4xy \qquad (1) \end{aligned}$$

Como x e y representam o número de lâmpadas, exigimos que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ e permitiremos que x e y sejam quaisquer números reais não-negativos. Além disso, $(100 - 2x)$ é o preço de venda de lâmpadas do primeiro tipo. Assim, exigimos que $100 - 2x \geqslant 0$ ou, equivalentemente, $x \leqslant 50$. Analogamente, como $(125 - 3y)$ é o preço de venda de lâmpadas do segundo tipo, exigimos que $y \leqslant \frac{125}{3}$. Logo, o domínio de f é a região fechada, definida pelo conjunto

$$\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 50 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{125}{3}\}$$

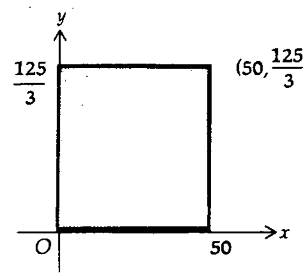

FIGURA 9

Essa região é retangular e aparece na Figura 9. A fronteira da região consiste nos lados do retângulo. Como f é uma função polinomial, então ela é contínua em toda parte. Logo, f é contínua em seu domínio; assim, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Os pontos críticos de f são encontrados, se determinarmos onde $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$.

$$f_x(x, y) = 88 - 4x - 4y \qquad f_y(x, y) = 114 - 6y - 4x$$

Expressando $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} x + y &= 22 \\ 2x + 3y &= 57 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $x = 9$ e $y = 13$. Para aplicar o teste da derivada segunda, calculamos as derivadas parciais segundas.

$$f_{xx}(x, y) = -4 \qquad f_{yy}(x, y) = -6 \qquad f_{xy}(x, y) = -4$$

No ponto (9, 13),

$$f_{xx}(9, 13) = -4 < 0$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(9, 13)f_{yy}(9, 13) - f_{xy}{}^2(9, 13) &= (-4)(-6) - (-4)^2 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Segue, então, pelo Teorema 17.3.5(ii), que f terá um valor máximo relativo em (9, 13).

De (1),

$$f(x, y) = x(88 - 2x) + y(114 - 3y) - 4xy \qquad (2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(9, 13) &= 9(70) + 13(75) - 468 \\ &= 1.137 \end{aligned}$$

* **N. do R.**: Considere uma unidade monetária básica que será denotada por \$. O valor numérico em qualquer outra moeda pode ser obtido multiplicando o original por um fator cambial determinado.