te chegam a \$ 2.000, ache o lucro semanal máximo que poderá ser obtido.

49. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é um número real qualquer.

$$\int x^r \ln x\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & \text{se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C & \text{se } r = -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int x^3 \ln x\,dx$.

50. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r e q são números reais quaisquer:

$$\int x^r(\ln x)^q\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}(\ln x)^q}{r+1} - \dfrac{q}{r+1}\displaystyle\int x^r(\ln x)^{q-1}\,dx & \text{se } r \neq -1 \\ \dfrac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C & \text{se } r = -1 \text{ e } q \neq -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula deduzida em (a) para calcular $\int x^4(\ln x)^2\,dx$

51. (a) Mostre que se $m \geqslant 2$ e m for inteiro,

$$\int \sec^m x\,dx = \frac{\sec^{m-2} x \operatorname{tg} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\,dx$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int \sec^6 x\,dx$.

52. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é qualquer número real:

$$\int x^r e^x\,dx = x^r e^x - r\int x^{r-1}e^x\,dx$$

(b) Use a fórmula derivada em (a) para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

53. Deduza a fórmula (3).

54. Deduza a fórmula (4).

Os Exercícios de 55 a 57 referem-se à Secção Suplementar 7.8.

55. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 10 sen 10 t volts em t s e um resistor de 3 ohms, além de um indutor de 1 henry ligado em série. Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$, quando $t = 0$, encontre (a) i quando $t = 0{,}1$ e (b) i quando $t = 3$.

56. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 100 sen 200 t volts em t s e um resistor de 10 ohms, além de um indutor de 0,1 henry ligado em série. (a) Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, expresse i como uma função de t. (b) Dê um valor aproximado de i para valores maiores de t em termos de funções seno e co-seno.

57. Faça o Exercício 56 se o circuito elétrico tiver uma força eletromotriz de 120 sen $120\pi t$ volts e um resistor de 100 ohms; as demais condições são as mesmas.

9.2 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO E CO-SENO

Vamos considerar quatro casos de integrais indefinidas envolvendo potências de seno e co-seno, conforme as potências sejam pares ou ímpares.

Caso 1: $\int \operatorname{sen}^n u\,du$ ou $\int \cos^n u\,du$, onde n é um inteiro ímpar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x(\cos x\,dx) \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x\,dx) \\ &= \int \cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx \qquad (1)\end{aligned}$$

Para a segunda integral do lado direito de (1) observe que sendo $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\,dx) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_1$$

Como a primeira integral do lado direito de (1) é $\operatorname{sen} x + C_2$,

$$\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$ ◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\, dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\cos x + 2\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x\, dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

Caso 2: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, onde pelo menos um dos expoentes é ímpar.

A solução desse caso é semelhante à do Caso 1.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$ ◀

Caso 3: $\int \operatorname{sen}^n u\, du$ e $\int \cos^n u\, du$, onde n é um inteiro par.

O método usado no Caso 1 e no Caso 2 não funciona neste caso. Usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C
\end{aligned}$$ ◀

Caso 4: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, ambos m e n são pares.

A solução deste caso é semelhante à do Caso 3.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$

Solução

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$$

Solução Se usarmos a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, teremos

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x \, dx$$
$$= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx$$
$$= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$
$$= \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região no primeiro quadrante, à esquerda da reta $x = \frac{\pi}{2}$ e limitada pela curva $y = \text{sen}\, x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução Vamos usar os símbolos A, M_x, M_y, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ definidos na Secção 6.4. A região e o i-ésimo elemento retangular estão na Figura 1. Primeiro vamos calcular a área da região.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \text{sen}\, \gamma_i\, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x\, dx \\ &= -\cos x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aplicamos a Definição 6.4.2 para calcular M_x e M_y. Para calcular M_y, usaremos integração por partes com $u = x$ e $dv = \text{sen}\, x\, dx$.

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\text{sen}\, \gamma_i]^2\, \Delta_i x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\, x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left[x - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}\pi\right] \\ &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, \text{sen}\, \gamma_i\, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} x\, \text{sen}\, x\, dx \\ &= -x \cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx \\ &= -x\cos x + \text{sen}\, x\Big]_0^{\pi/2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi \cos \tfrac{1}{2}\pi + \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

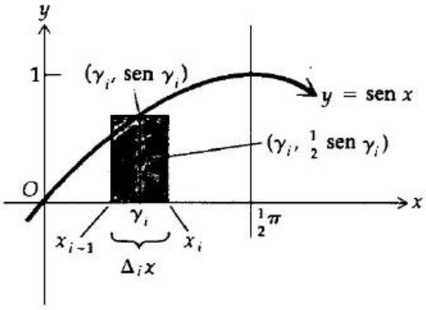

FIGURA 1

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{1}{1} & &= \frac{\frac{1}{8}\pi}{1} \\ &= 1 & &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

Assim, o centróide está no ponto $(1, \frac{1}{8}\pi)$.

O próximo exemplo envolve um outro tipo de integral contendo um produto de seno e co-seno.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \text{sen}\, 3x \cos 2x\, dx$$

Solução Vamos usar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{sen } mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}(m-n)x + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}(m+n)x$$

$$\begin{aligned}\int \text{sen } 3x \cos 2x\, dx &= \int (\tfrac{1}{2}\,\text{sen } x + \tfrac{1}{2}\,\text{sen } 5x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \text{sen } x\, dx + \tfrac{1}{2}\int \text{sen } 5x\, dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{10}\cos 5x + C\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 9.2

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \text{sen}^4 x \cos x\, dx$
2. $\int \text{sen}^5 x \cos x\, dx$
3. $\int \cos^3 4x\, \text{sen } 4x\, dx$
4. $\int \cos^6 \frac{1}{2}x\, \text{sen } \frac{1}{2}x\, dx$
5. $\int \text{sen}^3 x\, dx$
6. $\int \text{sen}^2 3x\, dx$
7. $\int \text{sen}^4 z\, dz$
8. $\int \cos^5 x\, dx$
9. $\int \cos^2 \frac{1}{2}x\, dx$
10. $\int \text{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$
11. $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$
12. $\int \cos^6 x\, dx$
13. $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$
14. $\int \text{sen}^2 2t \cos^4 2t\, dt$
15. $\int \text{sen}^2 3t \cos^2 3t\, dt$
16. $\int \sqrt{\cos z}\, \text{sen}^3 z\, dz$
17. $\int \dfrac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\text{sen } 3x}}\, dx$
18. $\int \text{sen}^3 \frac{1}{2}y \cos^2 \frac{1}{2}y\, dy$
19. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$
20. $\int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$
21. $\int \text{sen } 3y \cos 5y\, dy$
22. $\int \cos t \cos 3t\, dt$
23. $\int (\text{sen } 3t - \text{sen } 2t)^2\, dt$
24. $\int \text{sen } x\, \text{sen } 3x\, \text{sen } 5x\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$
26. $\int_0^1 \text{sen}^3 \frac{1}{2}\pi t\, dt$
27. $\int_0^1 \text{sen}^4 \frac{1}{2}\pi x\, dx$
28. $\int_0^{\pi/3} \text{sen}^3 t \cos^2 t\, dt$
29. $\int_0^1 \text{sen}^2 \pi t \cos^2 \pi t\, dt$
30. $\int_0^{\pi/6} \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$
31. $\int_0^{\pi/8} \text{sen } 3x \cos 5x\, dx$
32. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}x\, dx$
33. Calcule $\int 2\, \text{sen } x \cos x\, dx$ por três métodos: (a) fazendo a substituição $u = \text{sen } x$; (b) fazendo a substituição $u = \cos x$; (c) usando a identidade de $2\,\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$. Explique a aparência diferente das respostas obtidas em (a), (b) e (c).
34. Se n for um inteiro positivo qualquer, prove que

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 nx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

35. Se n for um inteiro positivo ímpar, prove que

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\, dx = 0$$

Nos Exercícios de 36 a 38, m e n são inteiros positivos; mostre que a fórmula dada é verdadeira.

36. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x \cos m\pi x\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$
37. $\int_{-1}^{1} \cos n\pi x\, \text{sen } m\pi x\, dx = 0$
38. $\int_{-1}^{1} \text{sen } n\pi x\, \text{sen } m\pi x\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$
39. Ache a área da região limitada pela curva $y = \text{sen}^2 x$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$.
40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação de um arco da senóide em torno do eixo x.
41. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno do eixo x.
42. A região no primeiro quadrante limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
43. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno da reta $y = 1$.
44. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido de revolução gerado.
45. Ache o centróide da região de $x = 1$ a $x = \frac{\pi}{2}$, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelo eixo x.
46. Ache o centróide da região descrita no Exercício 44.
47. Prove

$$\int \text{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} u\, du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.