$\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$. As frações parciais são usadas para integrar funções racionais nas Secções 9.5 e 9.6. Mais substituições para avaliar integrais indefinidas são dadas na Secção 9.7. Os integrandos naquela secção envolvem potências fracionárias de uma variável ou são potências racionais do seno e do coseno. Na Secção Suplementar 9.8 as funções hiperbólicas inversas são aplicadas na integração para dar novas formas de resultados obtidos anteriormente através de outros métodos.

Às vezes pode ser preferível fazer uso de uma tabela de integrais, em vez de efetuar uma integração complicada. Uma pequena tabela de integrais pode ser encontrada ao final deste volume e a Secção A.1 no apêndice dá instruções de como usá-la. Algumas vezes é necessário empregar técnicas de integração para expressar o integrando na forma em que ele aparece na tabela. Assim sendo, você deverá adquirir a capacidade de reconhecer qual a técnica a ser empregada numa dada integral. Além disso, é importante desenvolver habilidades de cálculo em todos os ramos da Matemática e os exercícios deste capítulo são uma boa oportunidade de treino. Por essas razões aconselhamos o uso das tabelas de integrais somente depois que você dominar a integração.

Na prática, não é sempre possível calcular uma integral definida através do cálculo de uma integral indefinida. Isto é, podemos ter uma integral definida que exista, mas o integrando não tem uma antiderivada que possa ser expressa em termos das funções elementares. Um exemplo de tal integral definida é

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\, dt$$

Uma calculadora programável ou um computador utilizando os métodos numéricos discutidos na Secção 5.10 podem ser usados para aproximar o valor dessa integral definida. Outro procedimento é dado no Exemplo 2 da Secção 13.3, onde uma série infinita é usada.

As fórmulas de integração indefinida que foram dadas nos capítulos anteriores e que são usadas com maior freqüência são dadas abaixo e foram numeradas para referências posteriores.

**1.** $\int du = u + C$

**2.** $\int a\, du = au + C$ onde $a$ é uma constante qualquer

**3.** $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du$

**4.** $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

**5.** $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

**6.** $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ onde $a > 0$ e $a \neq 1$

**7.** $\int e^u\, du = e^u + C$

**8.** $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

**9.** $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

**10.** $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$

**11.** $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$

12. $\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$

13. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$

14. $\int \operatorname{tg} u\, du = \ln|\sec u| + C$

15. $\int \operatorname{cotg} u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

16. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

17. $\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a \neq 0$

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \sec^{-1} \dfrac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$

21. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

22. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

23. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tgh} u + C$

24. $\int \operatorname{cosech}^2 u\, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

25. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

26. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u\, du = -\operatorname{cosech} u + C$

## 9.1 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil chamado *integração por partes*. Se $f$ e $g$ forem funções diferenciáveis, então

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Integrando ambos os membros, iremos obter

$$\int f(x)g'(x)\, dx = \int D_x[f(x)g(x)]\, dx - \int g(x)f'(x)\, dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx} \qquad (1)$$

Chamaremos (1) de **fórmula de integração por partes**. Para propósitos de cálculo existe uma maneira mais conveniente de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \quad \text{e} \quad v = g(x)$$

Então

$$du = f'(x)\, dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\, dx$$

assim sendo, (1) torna-se

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{2}$$

Essa fórmula expressa a integral $\int u\,dv$ em termos de uma outra integral, $\int v\,du$. Escolhendo adequadamente $u$ e $dv$, pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira. Quando escolhemos as substituições para $u$ e $dv$, em geral pretendemos que $dv$ seja o fator do integrando mais complicado que se possa integrar diretamente, e que $u$ seja uma função cuja derivada seja uma função mais simples. A seguir estão exemplos e ilustrações mostrando o método.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos calcular

$$\int x \ln x\,dx$$

Para determinar quais as substituições para $u$ e $dv$, devemos ter em mente que para encontrar $v$ precisamos saber integrar $dv$. Isso sugere que $dv = x\,dx$ e $u = \ln x$. Então,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{e} \quad du = \frac{dx}{x}$$

Da fórmula (2)

$$\begin{aligned}
\int x \ln x\,dx &= \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx - C_1\int\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - C_1 \ln x + C_2 \\
&= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2
\end{aligned}$$ ◀

Na Ilustração 1, observe que a primeira constante de integração $C_1$ não aparece na resposta final. $C_1$ foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de $v$ da forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x \ln x\,dx$. Essa situação vale em geral e provamos isso da seguinte forma: escrevendo $v + C_1$ na fórmula (2), teremos

$$\begin{aligned}
\int u\,dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1)\,du \\
&= uv + C_1u - \int v\,du - C_1\int du \\
&= uv + C_1u - \int v\,du - C_1u \\
&= uv - \int v\,du
\end{aligned}$$

Assim sendo, é desnecessário escrever $C_1$ quando calcularmos $v$ a partir de $dv$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A resposta na Ilustração 1 pode ser escrita como

$\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$

Verificamos esse resultado calculando a derivada de um produto.

$$D_x\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)\right] = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}x + x \ln x - \tfrac{1}{2}x$$
$$= x \ln x$$
◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para calcular

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx$$

usamos integração por partes com $dv = xe^{x^2}\, dx$ e $u = x^2$. Então

$$v = \tfrac{1}{2}e^{x^2} \quad \text{e} \quad du = 2x\, dx$$

Da fórmula (2)

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = x^2(\tfrac{1}{2}e^{x^2}) - \int (\tfrac{1}{2}e^{x^2})2x\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$
◀

---

**EXEMPLO 1** Calcule

$$\int x \cos x\, dx$$

**Solução** Seja $u = x$ e $dv = \cos x\, dx$. Então

$$du = dx \text{ e } v = \operatorname{sen} x$$

Assim

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

---

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** No Exemplo 1, se em vez de nossas escolhas de $u$ e $dv$ conforme está acima, tivéssemos tomado

$$u = \cos x \quad \text{e} \quad dv = x\, dx$$

então

$$du = -\operatorname{sen} x\, dx \quad \text{e} \quad v = \tfrac{1}{2}x^2$$

Assim

$$\int x \cos x\, dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

A integral do segundo membro é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente, indicando assim que as escolhas feitas para $u$ e $dv$ não são boas. ◀

Pode acontecer que determinada integral exija repetidas aplicações da integração por partes. Isso está ilustrado no exemplo abaixo.

**EXEMPLO 2** Calcule

$$\int x^2 e^x \, dx$$

**Solução** Seja $u = x^2$ e $dv = e^x\,dx$. Então

$$du = 2x\,dx \quad \text{e} \quad v = e^x$$

Temos, então,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx$$

Vamos aplicar a integração por partes ao segundo membro. Seja $\bar{u} = x$ e $d\bar{v} = e^x\,dx$. Então,

$$d\bar{u} = dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = e^x$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned}\int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + \bar{C}\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + \bar{C}) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \qquad \text{onde } C = -2\bar{C}\end{aligned}$$

A integração por partes é freqüentemente usada quando o integrando envolve logaritmos, funções trigonométricas inversas e produtos de funções.

**EXEMPLO 3** Calcule

$$\int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$$

**Solução** Seja $u = \operatorname{tg}^{-1} x$ e $dv = dx$. Então

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \quad \text{e} \quad v = x$$

Assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{-1} x \, dx &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2} \\ &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C\end{aligned}$$

Uma situação que ocorre às vezes quando estamos usando integração por partes é mostrada no Exemplo 4.

**EXEMPLO 4** Calcule

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

**Solução** Seja $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Então

$$du = e^x\, dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x$$

Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral, exceto que em vez de sen $x$ temos cos $x$. Aplicamos a integração por partes novamente, sendo $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x\, dx$. Então,

$$d\bar{u} = e^x\, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = \operatorname{sen} x$$

Assim,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right)$$

Agora temos no segundo membro a mesma integral que no primeiro. Assim, se somarmos $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos os membros da igualdade, teremos

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima tem uma constante arbitrária, pois no primeiro membro temos uma integral indefinida. Essa constante arbitrária foi escrita como $2C$; assim, quando dividirmos por 2 os membros da igualdade, a constante arbitrária na resposta será $C$. Assim, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

---

Ao aplicarmos a integração por partes em uma dada integral, um determinado par de escolhas para $u$ e $dv$ pode funcionar, enquanto que outro par pode falhar. Vimos isso na Ilustração 4 e um outro caso ocorre na Ilustração 5.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** No Exemplo 4, na etapa em que tínhamos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

se calcularmos a integral à direita tomando $\bar{u} = \cos x$ e $d\bar{v} = e^x\, dx$, temos

$$d\bar{u} = -\operatorname{sen} x\, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = e^x$$

Assim, iremos obter

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x\, dx &= -e^x \cos x + \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right)\\ &= \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$ ◀

Nos Exercícios 53 e 54 será pedido que você derive as seguintes fórmulas, onde $a$ e $n$ são números reais não-nulos.

$$\int e^{au} \operatorname{sen} nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C \tag{3}$$

$$\int e^{au} \cos nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C \tag{4}$$

Integrais da forma daquelas em (3) e (4) são freqüentes em problemas envolvendo circuitos elétricos como nos Exercícios 55-57, pertencentes à Secção Suplementar 7.8.

## EXERCÍCIOS 9.1

*Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.*

1. $\int xe^{3x}\, dx$
2. $\int x \cos 2x\, dx$
3. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
4. $\int x\, 3^x\, dx$
5. $\int \ln x\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^{-1} w\, dw$
7. $\int (\ln x)^2\, dx$
8. $\int x \sec^2 x\, dx$
9. $\int x \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$
12. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$
13. $\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$
15. $\int e^x \cos x\, dx$
16. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$
17. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\, dx$
19. $\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx$
20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}\, dx$
21. $\int \frac{\operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$
22. $\int \cos^{-1} 2x\, dx$
23. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$
24. $\int \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}\, dx$

*Nos Exercícios de 25 a 34, calcule a integral definida.*

25. $\int_0^2 x^2 3^x\, dx$
26. $\int_{-1}^2 \ln(x+2)\, dx$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$
28. $\int_0^{\pi^2/2} \cos\sqrt{2x}\, dx$
29. $\int_0^2 xe^{2x}\, dx$
30. $\int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos 2z\, dz$
31. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 4x\, dx$
32. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$
33. $\int_2^4 \sec^{-1}\sqrt{t}\, dt$
34. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x\, dx$
35. Ache a área da região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo $x$ e pela reta $x = e^2$.
36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo $x$.
37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo $y$.
38. Ache a área da região limitada pela curva $y = x \operatorname{cosec}^2 x$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{4}\pi$.
39. Ache a área da região limitada pela curva $y = 2xe^{-x/2}$, pelo eixo $x$ e pela reta $x = 4$.
40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo $x$ da região do Exercício 39.
41. A densidade linear de uma barra num ponto a $x$ m de um extremo é $2e^{-x}$ kg/m. Se a barra tiver 6 m de comprimento, ache a massa e o centro de massa da barra.
42. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = e^x$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 3$.
43. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e pelo eixo $y$.
44. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$, gira em torno da da reta $x = \frac{\pi}{2}$. Ache o volume do sólido gerado.
45. Um tanque cheio de água tem a forma de um sólido de revolução formado quando a região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 4$ gira em torno do eixo $x$. Ache o trabalho realizado ao bombear toda a água para a borda do tanque. A distância é medida em metros. Tome o eixo $x$ vertical e orientado para baixo.
46. Uma partícula move-se ao longo de uma reta sendo a distância da partícula a partir da origem em $t$ s igual a $s$ m. Se $v$ m/s for a velocidade em $t$ s, $s = 0$ quando $t = 0$, e $v \cdot s = t \operatorname{sen} t$, ache $s$ em termos de $t$ e também $s$ quando $t = \frac{\pi}{2}$.
47. A função custo marginal é $C'$ e $C'(x) = \ln x$, onde $x > 1$. Ache a função custo total se $C(x)$ for o custo total da produção de $x$ unidades e $C(1) = 5$.
48. Um fabricante descobriu que se $100x$ unidades de uma mercadoria forem produzidas por semana, o custo marginal será determinado por $x2^{x/2}$, e o rendimento marginal será determinado por $8 \cdot 2^{-x/2}$, onde o custo de produção e o rendimento são em milhares. Se os custos fixados semanalmen-