20. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9) - \ln(1 - x^2 - y^2)$

21. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(x + y) + \ln(xy)$

22. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(xy)$

23. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x + y)}{x + y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{se } x + y = 0 \end{cases}$

24. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ x - y & \text{se } x = y \end{cases}$

Nos Exercícios de 25 a 31, a função é descontínua na origem, pois $f(0, 0)$ não existe. Determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se a descontinuidade for removível, redefina $f(0, 0)$, de tal forma que a nova função seja contínua em $(0, 0)$.

25. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

26. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

27. $f(x, y) = (x + y)\,\text{sen}\,\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

28. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

29. $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$

30. $f(x, y) = \dfrac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

31. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

32. A função F é definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & \text{se } x^2 - 3y^2 \leq 1 \\ 2 & \text{se } x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

Mostre que a região de continuidade de F consiste em todos os pontos de R^2, exceto aqueles sobre a hipérbole $x^2 - 3y^2 = 1$.

33. A função G é definida por

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{se } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{se } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

Mostre que a região de continuidade de G consiste em todos os pontos de R^2, exceto aqueles sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

34. (a) Dê uma definição de continuidade em um ponto para uma função de três variáveis, similar à Definição 16.3.2. (b) Enuncie teoremas para funções de três variáveis, similares aos Teoremas 16.3.3 e 16.3.7.

Nos Exercícios de 35 a 38, use as definições e teoremas do Exercício 34 para discutir a continuidade da função dada.

35. $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$

36. $f(x, y, z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$

37. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

16.4 DERIVADAS PARCIAIS

A discussão sobre derivação de uma função de n variáveis com valores reais reduz-se ao caso unidimensional, se tratarmos uma função de n variáveis como uma função de uma variável de cada vez, mantendo fixas as demais variáveis. Isso nos leva ao conceito de *derivada parcial*. Vamos definir primeiro a derivada parcial de uma função de duas variáveis.

16.4.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função de duas variáveis, x e y. A **derivada parcial de f em relação a x** é aquela função, denotada por $D_1 f$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se o limite existir. Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y** é aquela função, denotada por $D_2 f$, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$D_2 f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se o limite existir.

O processo de encontrar uma derivada parcial é chamado de **derivação parcial**.

$D_1 f$ é lido como "D sub 1 de f" (sub é abreviatura de subíndice), e isso denota a função que é a derivada parcial de f em relação à primeira variável.

$D_1f(x, y)$ é lido como "D sub 1 de f de x e y", e isso denota o valor funcional de D_1f no ponto (x, y). Outras notações para D_1f são f_1, f_x e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Outras notações para $D_1f(x, y)$ são $f_1(x, y)$, $f_x(x, y)$ e $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Da mesma forma, outras notações para D_2f são f_2, f_y e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ou ainda, para $D_2f(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_y(x, y)$ e $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Se $z = f(x, y)$, podemos escrever $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ para $D_1f(x, y)$. Uma derivada parcial não pode ser considerada como uma razão entre ∂z e ∂x, pois nenhum desses símbolos têm significado separado. A notação $\dfrac{dy}{dx}$ pode representar o quociente de duas diferenciais quando y é uma função de uma única variável x, mas não há uma interpretação similar para $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

EXEMPLO 1 Aplique a Definição 16.4.1 para achar $D_1f(x, y)$ e $D_2f(x, y)$ se

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

Solução

$$\begin{aligned}
D_1f(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\,\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\,\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x - 2y) \\
&= 6x - 2y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2f(x, y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x\,\Delta y + y^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x\Delta y + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} (-2x + 2y + \Delta y) \\
&= -2x + 2y
\end{aligned}$$

Se (x_0, y_0) for um determinado ponto no domínio de f, então

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

se esse limite existir, e

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2}$$

se esse limite existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a fórmula (1) para encontrar $D_1 f(3, -2)$ para a função f do Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
D_1 f(3, -2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{27 + 18\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4\,\Delta x + 4 - 43}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (18 + 3\,\Delta x + 4) \\
&= 22
\end{aligned}$$

◀

Fórmulas alternativas de (1) e (2) para $D_1 f(x_0, y_0)$ e $D_2 f(x_0, y_0)$ são dadas por

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

se o limite existir, e

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \tag{4}$$

se o limite existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos aplicar a fórmula (3) para encontrar $D_1 f(3, -2)$ para a função f do Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
D_1 f(3, -2) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} (3x + 13) \\
&= 22
\end{aligned}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** No Exemplo 1 mostramos que

$$D_1 f(x, y) = 6x - 2y$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_1 f(3, -2) &= 18 + 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Esse resultado está de acordo com o que foi obtido nas Ilustrações 1 e 2. ◀

Comparando a Definição 16.4.1 com a definição de derivada ordinária (3.1.3), vemos que $D_1 f(x, y)$ é a derivada ordinária de f quando f for considerada função de uma variável x (isto é, se y for mantido constante); e $D_2 f(x, y)$ é a derivada ordinária de f, se f for considerada como função de uma variável y (isto é, se x for mantido constante). Assim sendo, os resultados do Exemplo 1 podem ser obtidos mais facilmente, se aplicarmos os teoremas para derivação ordinária, com y considerado constante ao calcularmos $D_1 f(x, y)$ e com x considerado constante, ao calcularmos $D_2 f(x, y)$. O exemplo a seguir ilustrará isso.

EXEMPLO 2 Ache $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ se

$$f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \operatorname{sen} xy^2$$

Solução Tratando f como uma função de x e mantendo y constante, temos

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + y^2 \cos xy^2$$

Considerando f como uma função de y e mantendo x constante, temos

$$f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy + 2xy \cos xy^2$$

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que (a) $f_1(0, y) = -y$ para todo y e (b) $f_2(x, 0) = x$ para todo x.

Solução

(a) Se $y \neq 0$, de (3)

$$\begin{aligned} f_1(0, y) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{y^3}{y^2} \\ &= -y \end{aligned}$$

Se $y = 0$, de (3)

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f_1(0, y) = -y$ se $y \neq 0$ e $f_1(0, 0) = 0$, podemos concluir que $f_1(0, y) = -y$ para todo y.

(b) Se $x \neq 0$, de (4)

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^3}{x^2} \\ &= x \end{aligned}$$

Se $x = 0$, de (4)

$$\begin{aligned} f_2(0, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f_2(x, 0) = x$ se $x \neq 0$ e $f_2(0, 0) = 0$, então $f_2(x, 0) = x$ para todo x.

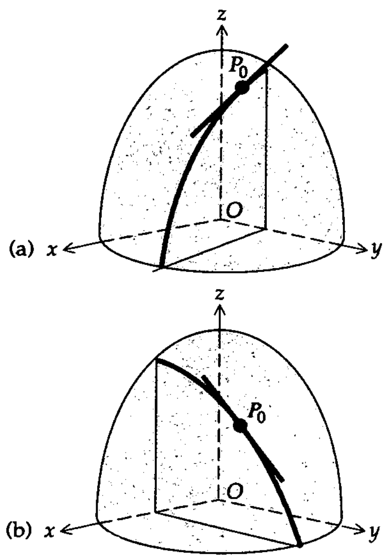

FIGURA 1

Interpretações geométricas das derivadas parciais de uma função de duas variáveis são similares àquelas dadas para funções de uma variável. O gráfico de uma função f de duas variáveis é uma superfície cuja equação é $z = f(x, y)$. Se y for mantida constante (digamos, $y = y_0$), então $z = f(x, y_0)$ será uma equação do traço dessa superfície no plano $y = y_0$. A curva pode ser representada pelas equações

$$y = y_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y) \tag{5}$$

pois ela é a intersecção dessas duas superfícies.

Então, $D_1 f(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente à curva dada pelas equações (5) no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, no plano $y = y_0$. Analogamente, $D_2 f(x_0, y_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva cujas equações são

$$x = x_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y)$$

no ponto P_0, no plano $x = x_0$. A Figura 1(a) e (b) mostra partes das curvas e das retas tangentes.

EXEMPLO 4 Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção das superfícies

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

com o plano $y = 2$, no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$.

Solução A inclinação pedida é o valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

Assim, em $(2, 2, \sqrt{3})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Como toda derivada é uma medida de uma taxa de variação, uma derivada parcial pode ser assim interpretada. Se f for uma função de duas variáveis x e y, a derivada parcial de f em relação a x no ponto $P_0(x_0, y_0)$ dará a taxa de variação instantânea, em P_0, de $f(x, y)$, por unidade de variação em x (apenas x varia, enquanto y é mantido fixo em y_0). Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y em P_0 dará a taxa de variação instantânea, em P_0, de $f(x, y)$, por unidade de variação em y, com x fixado.

EXEMPLO 5 De acordo com a *lei dos gases ideais* para um gás confinado, se P newtons por metros quadrados for a pressão, V metros cúbicos for o volume e T graus for a temperatura, teremos a fórmula

$$PV = kT \tag{6}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de um gás em certo recipiente seja 100 m³ e que a temperatura seja 90° e $k = 8$. (a) Ache a taxa de variação de P por unidade de variação de T se V permanece fixo em 100 m³. (b) Use o resultado da parte (a) para aproximar a taxa de variação na pressão, se a temperatura for aumentada para 92°. (c) Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em P se T permanece fixa em 90°. (d) Suponha que a temperatura seja mantida constante. Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no volume, necessária para produzir a mesma variação na pressão que foi obtida na parte (b).

Solução Substituindo $V = 100$, $T = 90$ e $k = 8$ na equação (6), obtemos $P = 7{,}2$.

(a) Resolvendo (6) para P com $k = 8$, obtemos

$$P = \frac{8T}{V}$$

A taxa de variação instantânea de P por variação unitária em T, se V permanece fixo, é $\frac{\partial P}{\partial T}$, e

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$$

Quando $T = 90$ e $V = 100$, $\frac{\partial}{\partial T} = 0{,}08$, que é a resposta pedida.

(b) Do resultado da parte (a), quando T for acrescido de 2° (e V permanecer fixo), o aumento aproximado em P será $2(0{,}08) = 0{,}16$. Concluímos, então, que se a temperatura for aumentada de 90° para 92°, o aumento na pressão será de aproximadamente 0,16 N/m².

(c) Resolvendo (6) para V quando $k = 8$, obtemos

$$V = \frac{8T}{P}$$

A taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P, se T permanece fixa, é $\frac{\partial V}{\partial P}$, e

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8T}{P^2}$$

Quando $T = 90$ e $P = 7{,}2$,

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8(90)}{(7{,}2)^2}$$
$$= -\frac{125}{9}$$

que é a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P quando $T = 90$ e $P = 7{,}2$, se T permanecer fixa em 90°.

(d) Se P for acrescido de 0,16 e T for mantida fixa, então, do resultado da parte (c), a variação em V deve ser de $(0{,}16)(-\frac{125}{9}) = -\frac{20}{9}$. Logo, devemos diminuir o volume em $\frac{20}{9}$ m^3, se a pressão for aumentada de 7,2 para 7,36 N/m^2.

Vamos estender o conceito de derivada parcial para funções de n variáveis.

16.4.2 DEFINIÇÃO Seja $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um ponto em R^n e seja f uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Então a derivada parcial de f em relação a x_k é a função, denotada por D_kf, tal que seu valor funcional em qualquer ponto P do domínio de f seja dado por

$$D_kf(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$
$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

se esse limite existir.

Em particular, se f for uma função de três variáveis x, y e z, então as derivadas parciais de f serão dadas por

$$D_1f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

se esses limites existirem.

EXEMPLO 6 Dada $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$, verificamos que

$$xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = 3f(x, y, z)$$

Solução Mantidos y e z constantes, obtemos

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

Mantidos x e z constantes, obtemos

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

Mantidos x e y constantes, obtemos

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 16.4

Nos Exercícios de 1 a 6, aplique a Definição 16.4.1 para encontrar as derivadas parciais indicadas.

1. $f(x, y) = 6x + 3y - 7$; $D_1f(x, y)$
2. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$; $D_1f(x, y)$
3. $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$; $D_2f(x, y)$
4. $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$; $D_2f(x, y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(x, y)$
6. $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y}$; $f_y(x, y)$

Nos Exercícios de 7 a 10, aplique a Definição 16.4.2 para encontrar as derivadas parciais indicadas.

7. $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$; $D_2f(x, y, z)$
8. $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$; $D_1f(x, y, z)$
9. $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt$; $f_r(x, y, z, r, t)$
10. $f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2st + st^2v - 2tuv^2 - tvw + 3uw^2$; $f_v(r, s, t, u, v, w)$
11. Dada $f(x, y) = x^2 - 9y^2$, encontre $D_1f(2, 1)$, (a) aplicando a fórmula (1); (b) aplicando a fórmula (3); (c) aplicando a Definição 16.4.1 e então substituindo x e y por 2 e 1, respectivamente.
12. Para a função do Exercício 11, ache $D_2f(2, 1)$, (a) aplicando a fórmula (2); (b) aplicando a fórmula (4); (c) aplicando a Definição 16.4.1 e então substituindo x e y por 2 e 1, respectivamente.

Nos Exercícios de 13 a 24, ache a derivada parcial indicada, mantendo todas as variáveis constantes menos uma, e aplicando os teoremas para derivação ordinária.

13. $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$; $D_1f(x, y)$
14. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$; $D_2f(x, y)$
15. $f(\theta, \phi) = \operatorname{sen} 3\theta \cos 2\phi$; $f_\phi(\theta, \phi)$
16. $f(r, \theta) = r^2 \cos\theta - 2r \operatorname{tg}\theta$; $f_\theta(r, \theta)$
17. $z = e^{y/x} \ln \dfrac{x^2}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
18. $r = e^{-\theta}\cos(\theta + \phi)$; $\dfrac{\partial r}{\partial \theta}$
19. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$
20. $u = \operatorname{tg}^{-1}(xyzw)$; $\dfrac{\partial u}{\partial w}$
21. $f(x, y, z) = 4xyz + \ln(2xyz)$; $f_3(x, y, z)$
22. $f(x, y, z) = e^{xy}\operatorname{senh} 2z - e^{xy}\cosh 2z$; $f_z(x, y, z)$
23. $f(x, y, z) = e^{xyz} + \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{3xy}{z^2}$; $f_y(x, y, z)$
24. $f(r, \theta, \phi) = 4r^2 \operatorname{sen}\theta + 5e^r \cos\theta \operatorname{sen}\phi - 2\cos\phi$; $f_2(r, \theta, \phi)$
25. If $f(r, \theta) = r \operatorname{tg}\theta - r^2 \operatorname{sen}\theta$, ache (a) $f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $f_2(3, \pi)$.
26. If $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \ln(y + z)$, ache (a) $f_1(3, 0, 17)$; (b) $f_2(1, 0, 2)$; (c) $f_3(0, 0, 1)$.

Nos Exercícios 27 e 28, ache $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

27. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \ln \operatorname{sen} t\, dt$
28. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y e^{\cos t}\, dt$
29. Dada $u = \operatorname{sen}\dfrac{r}{t} + \ln\dfrac{t}{r}$. Verifique $t\dfrac{\partial u}{\partial t} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$.
30. Dada $w = x^2y + y^2z + z^2x$. Prove que
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$$
31. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
Ache (a) $f_1(0, 0)$; (b) $f_2(0, 0)$.

32. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
Ache (a) $f_1(0, y)$ se $y \neq 0$; (b) $f_1(0, 0)$.

33. Para a função do Exercício 32, ache (a) $f_2(x, 0)$ se $x \neq 0$; (b) $f_2(0, 0)$.

34. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$, no ponto $(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

35. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto $(2, 1, 5)$. Faça um esboço. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

36. Ache as equações da reta tangente à curva de intersecção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $y = 2$, no ponto $(1, 2, 2)$.

37. A temperatura em qualquer ponto de uma placa plana é T graus e $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Se a distância for medida em centímetros, ache a taxa de variação da temperatura em relação à distância movida ao longo da placa nas direções dos eixos positivos x e y, respectivamente, no ponto $(3, 1)$.

38. Use a lei dos gases ideais para um gás confinado (veja o Exemplo 5) e mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

39. Se V for o valor atual de uma anuidade ordinária de pagamentos iguais de \$ 100,00 ao ano, por t anos, a uma taxa de juros de $100i\%$ ao ano, então

$$V = 100\left[\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}\right]$$

(a) Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em i, se t permanecer fixo em 8. (b) Use o resultado de (a) para encontrar a variação aproximada no valor atual, se a taxa de juros mudar de 6 para 7% e o tempo permanecer fixo em 8 anos. (c) Ache a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em t, se i permanecer fixo em 0,06. (d) Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação aproximada do valor atual, se o tempo for diminuído de 8 para 7 anos e taxa de juros estiver fixa em 6%.

40. Suponha que $10.000x$ da unidade monetária seja o inventário feito numa loja, y seja o número de balconistas na loja, P seja o lucro semanal da loja e

$$P = 3.000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

onde $15 \leqslant x \leqslant 25$ e $5 \leqslant y \leqslant 12$. No momento, o inventário é de \$ 180.000,00 e existem 8 balconistas. (a) Ache a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em x, se y permanece fixo em 8. (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal, se o inventário mudar de \$ 180.000,00 para \$ 200.000,00 e o número de balconistas permanecer fixo em 8. (c) Ache a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em y, se x permanece fixo em 18. (d) Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal, se o número de balconistas for aumentado de 8 para 10 e o inventário permanecer fixo em \$ 180.000,00.

41. Se S for a área da superfície em metros quadrados do corpo de uma pessoa, então a fórmula que dá um valor aproximado para S será

$$S = 2W^{0,4}H^{0,7}$$

onde W kg e H m são o peso e a altura da pessoa. Se $W = 70$ kg e $H = 1,8$ m, ache $\dfrac{\partial S}{\partial W}$ e $\dfrac{\partial S}{\partial H}$ e interprete o resultado.

16.5 DIFERENCIABILIDADE E DIFERENCIAL TOTAL

Definiremos a *diferenciabilidade* de funções de mais de uma variável através de uma equação envolvendo o incremento de uma função. Para motivar essa definição obtemos primeiro uma representação para o incremento de uma função de uma única variável que é similar àquela que irá aparecer em nossa Definição 16.5.2 de diferenciabilidade. Discutimos o incremento de uma função de uma única variável na Secção 3.1 e lembremos que, naquela secção, se f for uma função derivável de x, e $y = f(x)$, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde Δx e Δy são incrementos de x e y e

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Quando $|\Delta x|$ for pequeno e $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x$ difere de $f'(x)$ por um número pequeno que depende de Δx e será denotado por ϵ. Então,

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \qquad \text{se } \Delta x \neq 0$$

onde ϵ é uma função de Δx. Dessa equação obtemos

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x$$

onde ϵ é uma função de Δx e $\epsilon \to 0$ se $\Delta x \to 0$.

Do exposto acima, segue que se a função f for derivável em x_0, o incremento de f em x_0, denotado por $\Delta f(x_0)$, será dado por

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad \text{onde} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$$

Para funções de duas ou mais variáveis, uma equação correspondente a esta é usada para definir a diferenciabilidade de uma função. Além disso, da definição, determinamos um critério para uma função ser diferenciável em um ponto. Os detalhes serão dados para uma função de duas variáveis e começaremos por definir o *incremento* de tal função.

16.5.1 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y, então o **incremento de f** no ponto (x_0, y_0), denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, é dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

A Figura 1 ilustra essa definição para uma função que é contínua no disco aberto contendo os pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. A figura mostra parte da superfície $z = f(x, y)$. $\Delta f(x_0, y_0) = \overline{QR}$, onde Q é o ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0))$ e R é o ponto com as coordenadas $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$.

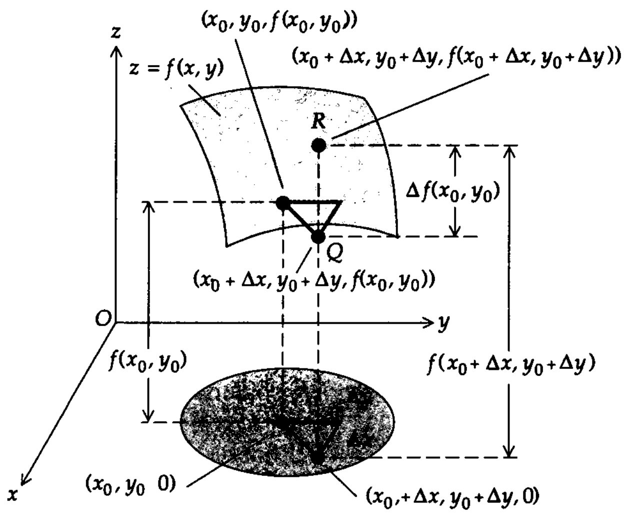

FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para a função f definida por

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

encontramos o incremento de f num ponto (x_0, y_0) qualquer.

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0{}^2) \\
&= 3x_0 + 3\,\Delta x - x_0 y_0{}^2 - y_0{}^2\,\Delta x - 2x_0 y_0\,\Delta y - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y \\
&\qquad - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0{}^2 \\
&= 3\,\Delta x - y_0{}^2\,\Delta x - 2x_0 y_0\,\Delta y - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

◀

16.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y e o incremento de f em (x_0, y_0) puder ser escrito como

$$\Delta f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0)\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy, tais que $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, então diremos que f é **diferenciável** em (x_0, y_0).

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar a Definição 16.5.2 para provar que a função da Ilustração 1 é diferenciável em todos os pontos de R^2. Precisamos mostrar que para todos os pontos (x_0, y_0) em R^2 podemos encontrar um ϵ_1 e um ϵ_2, tais que

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x - D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y = \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

e $\epsilon_1 \to 0$, bem como $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Como $f(x, y) = 3x - xy^2$,

$$D_1 f(x_0, y_0) = 3 - y_0^2 \quad \text{e} \quad D_2 f(x_0, y_0) = -2x_0 y_0$$

Com esses valores e o valor de $\Delta f(x_0, y_0)$ da Ilustração 1,

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x - D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y = -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

O lado direito da igualdade acima pode ser escrito das seguintes formas:

$$[-2y_0\,\Delta y - (\Delta y)^2]\,\Delta x + (-x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$
$$(-2y_0\,\Delta y)\,\Delta x + (-\Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$
$$[-(\Delta y)^2]\,\Delta x + (-2y_0\,\Delta x - x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$
$$0 \cdot \Delta x + [-2y_0\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y]\,\Delta y$$

Assim, há quatro pares possíveis de valores para ϵ_1 e ϵ_2:

$$\epsilon_1 = -2y_0\,\Delta y - (\Delta y)^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -x_0\,\Delta y$$
$$\epsilon_1 = -2y_0\,\Delta y \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -\Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y$$
$$\epsilon_1 = -(\Delta y)^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -2y_0\,\Delta x - x_0\,\Delta y$$
$$\epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -2y_0\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y$$

Para cada par

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0$$

Deve ser notado que é necessário encontrar apenas um par de valores para ϵ_1 e ϵ_2. ◄

16.5.3 TEOREMA Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em um ponto, ela será contínua nesse ponto.

Prova Se f for diferenciável em um ponto (x_0, y_0), segue, da Definição 16.5.2, que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

onde $\epsilon_1 \to 0$, bem como $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Logo,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

Passando ao limite ambos os membros da igualdade acima quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, obtemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1}$$

Se expressarmos $x_0 + \Delta x = x$ e $y_0 + \Delta y = y$, então "$(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$" é equivalente a "$(x, y) \to (x_0, y_0)$". Assim, de (1),

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

o que prova a continuidade de f em (x_0, y_0). ■

O Teorema 16.5.3 estabelece que para uma função de duas variáveis, *diferenciabilidade implica continuidade*. Mas a mera existência de derivadas parciais $D_1 f$ e $D_2 f$ num ponto não implica diferenciabilidade naquele ponto. O exemplo a seguir ilustra esse fato.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

prove que $D_1 f(0, 0)$ e $D_2 f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D_2 f(0, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, ambas $D_1 f(0, 0)$ e $D_2 f(0, 0)$ existem.

No Exemplo 4 da Secção 16.2 demonstramos que para essa função, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe; logo, f não é contínua em $(0, 0)$. Como f não é contínua em $(0, 0)$, segue, do Teorema 16.5.3, que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

O teorema a seguir dá condições de garantir que uma função seja diferenciável em um ponto. É muito mais fácil do que aplicar a Definição 16.5.2. Sua prova aparece na Secção Suplementar 16.8.

16.5.4 TEOREMA Seja f uma função de duas variáveis x e y. Suponha que $D_1 f$ e $D_2 f$ existam em um disco aberto $B(P_0; r)$, onde P_0 é o ponto (x_0, y_0). Então, se $D_1 f$ e $D_2 f$ forem contínuas em P_0, f será diferenciável em P_0.

EXEMPLO 2 Use o Teorema 16.5.4 para provar que a função definida por

$$f(x, y) = x^3 + 3xy - 5y^3$$

é diferenciável em toda parte.

Solução Calculamos as derivadas parciais:

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 + 3y \qquad D_2 f(x, y) = 3x - 15y^2$$

Como $D_1 f$ e $D_2 f$ são contínuas em toda parte, segue do Teorema 16.5.4 que f é diferenciável em toda parte.

O argumento usado para a função polinomial f do Exemplo 2 pode ser aplicado a qualquer função polinomial. Assim sendo, toda função polinomial é diferenciável em toda parte.

Observe que as condições dadas no Teorema 16.5.4 são suficientes para provar a diferenciabilidade de uma função em um ponto. Mas elas não são condições necessárias. Isto é, uma função pode ser diferenciável em um ponto, mesmo que suas derivadas parciais não sejam contínuas neste ponto. Um exemplo de tal função aparece nos Exercícios de 42 até 45. Uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 16.5.4 será dita **continuamente diferenciável** no ponto P_0. Assim, a diferenciabilidade contínua em um ponto é uma condição suficiente, mas não necessária, para a diferenciabilidade no ponto.*

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

use o Teorema 16.5.4 para provar que f é diferenciável em (0, 0).

Solução Para encontrar $D_1 f$, consideremos dois casos: $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 0)$. Se $(x, y) = (0, 0)$, temos

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)$. A fim de encontrar $D_1 f(x, y)$, usamos o teorema para a derivada ordinária de um quociente e consideramos y como uma constante.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

* **N. do R.**: Observe que para uma função de *uma* variável a existência de derivada e a diferenciabilidade são equivalentes, o que *não* acontece para funções de várias variáveis. Por esse motivo, não é rigorosamente correto usar o termo "diferenciar" no lugar de "derivar" de forma geral, embora isso seja comum.