5.5 A INTEGRAL DEFINIDA

Na Secção 5.4, a medida da área de uma região foi definida como sendo o seguinte limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \tag{1}$$

Para chegarmos a essa definição, dividimos o intervalo fechado $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento e então tomamos c_i como sendo o ponto do i-ésimo subintervalo no qual f tem um valor mínimo absoluto. Também restringimos os valores funcionais a serem não-negativos em $[a, b]$ e além disso exigimos que f fosse contínua em $[a, b]$.

O limite em (1) é um caso particular de um novo tipo de processo de limite que nos leva à definição de *integral definida*. Vamos discutir agora esse "novo tipo de limite".

Seja f a função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos dividir esse intervalo em n subintervalos, escolhendo qualquer dos $(n - 1)$ pontos intermediários entre a e b. Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ os pontos intermediários, de tal forma que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Os pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ não são necessariamente eqüidistantes. Seja $\Delta_1 x$ o comprimento do primeiro subintervalo, de tal forma que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; seja $\Delta_2 x$ o comprimento do segundo subintervalo tal que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; e assim por diante, de forma que o comprimento do i-ésimo subintervalo seja $\Delta_i x$, e

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

Um conjunto de todos esses subintervalos do intervalo $[a, b]$ é chamado uma **partição** do intervalo $[a, b]$. Seja Δ tal partição. A Figura 1 ilustra essa partição Δ de $[a, b]$.

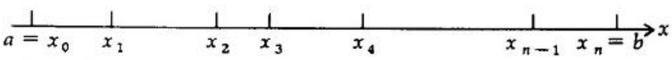

FIGURA 1

A partição Δ contém n subintervalos. Um deles é o maior; pode existir mais de um desses subintervalos. O comprimento do maior subintervalo da partição Δ, chamado **norma** da partição, é denotado por $\|\Delta\|$.

Vamos escolher um ponto em cada subintervalo da partição Δ: seja ξ_1 o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$ de tal forma que $x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1$. Tomemos ξ_2 como o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, de tal forma que $x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2$ e assim por diante, de forma que ξ_i seja o ponto escolhido em $[x_{i-1}, x_i]$ e $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Formamos, então, a soma

$$f(\xi_1)\, \Delta_1 x + f(\xi_2)\, \Delta_2 x + \ldots + f(\xi_i)\, \Delta_i x + \ldots + f(\xi_n)\, \Delta_n x$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Tal soma é denominada **soma de Riemann**, assim chamada pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que $f(x) = 10 - x^2$, com $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 3$. Vamos achar a soma de Riemann para a função f em $[\frac{1}{4}, 3]$ para a partição Δ: $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{3}{4}$, $x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 3$ e $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_3 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_4 = 2$, $\xi_5 = 2\frac{3}{4}$.

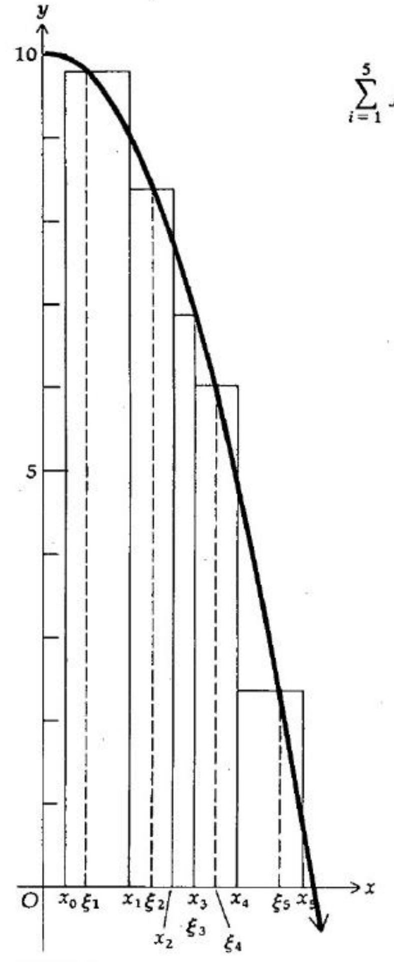

FIGURA 2

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de f em $[\frac{1}{4}, 3]$ e os cinco retângulos cujas áreas são os termos da soma de Riemann.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\,\Delta_i x &= f(\xi_1)\,\Delta_1 x + f(\xi_2)\,\Delta_2 x + f(\xi_3)\,\Delta_3 x + f(\xi_4)\,\Delta_4 x + f(\xi_5)\,\Delta_5 x\\ &= f(\tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{5}{4})(1\tfrac{1}{2} - 1) + f(\tfrac{7}{4})(1\tfrac{3}{4} - 1\tfrac{1}{2}) + f(2)(2\tfrac{1}{4} - 1\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{11}{4})(3 - 2\tfrac{1}{4})\\ &= (9\tfrac{3}{4})(\tfrac{3}{4}) + (8\tfrac{7}{16})(\tfrac{1}{2}) + (6\tfrac{15}{16})(\tfrac{1}{4}) + (6)(\tfrac{1}{2}) + (2\tfrac{7}{16})(\tfrac{3}{4})\\ &= 18\tfrac{3}{32}\end{aligned}$$

A norma de Δ é o comprimento do maior subintervalo. Logo $\|\Delta\| = \frac{3}{4}$. ◀

Como os valores funcionais $f(x)$ não estão restritos aos valores não-negativos, alguns dos $f(\xi_i)$ podem ser negativos. Em tal caso, a interpretação geométrica da soma de Riemann é a soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x com os negativos das medidas das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x. Essa situação está ilustrada na Figura 3. Aqui

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\,\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

pois $f(\xi_3)$, $f(\xi_4)$, $f(\xi_5)$, $f(\xi_8)$, $f(\xi_9)$ e $f(\xi_{10})$ são números negativos.

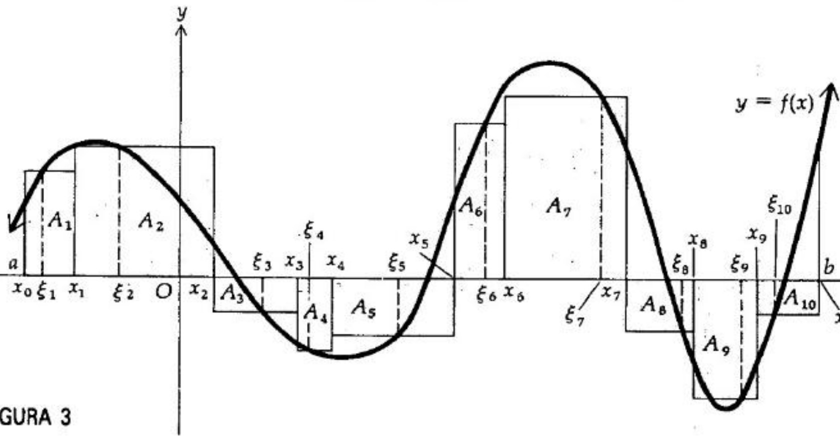

FIGURA 3

Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que exista um número L tal que $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right|$ possa ser tão pequeno quanto desejarmos para todas as partições Δ que tenham normas suficientemente pequenas, e para qualquer ξ_i, no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, f é chamada de *integrável* em $[a, b]$.

5.5.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, f será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right| < \epsilon \tag{2}$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = L \tag{3}$$

Essa definição estabelece que, para uma dada função f definida no intervalo fechado $[a, b]$, podemos tornar os valores das somas de Riemann tão próximos de L quanto desejarmos, tomando as normas $\|\Delta\|$ de todas as partições Δ de $[a, b]$ suficientemente pequenas para todas as escolhas possíveis dos números ξ_i para os quais $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

O processo de limite dado por (3) é diferente daquele que foi discutido no Capítulo 2. Na Definição 5.5.1, o número L em (3) existe se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ com $\|\Delta\| < \delta$ e para todo ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então a desigualdade (2) será válida.

Na Definição 2.1.1 tínhamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{4}$$

se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon.$$

No processo de limite (3) para um dado $\delta > 0$, existe uma infinidade de partições Δ com norma $\|\Delta\| < \delta$. Isto é análogo ao fato de que no processo de limite (4), para um dado $\delta > 0$, existe uma infinidade de valores de x para os quais $0 < |x - a| < \delta$. Mas, no processo de limite (3), para cada partição Δ existe uma infinidade de escolhas de ξ_i. É nesse aspecto que os dois processos de limite diferem.

O Teorema 2.1.2, provado na Secção Suplementar 2.9, estabelece que se o número L no processo de limite (4) existir, então será único. De modo similar, podemos mostrar que se existir um número L satisfazendo a Definição 5.5.1, então ele será único. Agora podemos definir a *integral definida*.

5.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a **integral definida** de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, será dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \tag{5}$$

se o limite existir.

Note que a afirmação "a função f é integrável no intervalo fechado $[a, b]$" é sinônima da afirmação "a integral definida de f de a até b existe".

Na notação de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamada de **integrando**, a de **limite inferior** e b de **limite superior**. O símbolo $\int$ é chamado de **sinal de de integração.** O sinal de integração lembra um S maiúsculo, o que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma. O símbolo é o mesmo que foi usado para indicar a operação de antidiferenciação. A razão para o emprego do mesmo símbolo encontra-se no Teorema 5.8.2, chamado de segundo teorema fundamental do Cálculo, que possibilita calcular a integral definida através da determinação de uma antiderivada (também chamada de **integral indefinida**).

A seguinte questão surge agora: sob que condições existe um número L satisfazendo a Definição 5.5.2, ou seja, sob que condições uma função é integrável? Uma resposta a essa questão é dada pelo próximo teorema.

5.5.3 TEOREMA Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela será integrável em $[a, b]$.

A demonstração desse teorema foge ao contexto deste livro, sendo encontrada em qualquer texto de Cálculo Avançado. A condição de que f seja contínua em $[a, b]$, apesar de ser suficiente para garantir a integrabilidade de f em $[a, b]$, não é necessária à existência de $\int_a^b f(x)\, dx$. Isto é, se f for contínua em $[a, b]$, então o Teorema 5.5.3 irá nos assegurar de que $\int_a^b f(x)\, dx$ existe; contudo, há funções que são descontínuas, embora sejam integráveis em um intervalo fechado. Tal função é dada no Exemplo 2, no final desta secção.

No começo desta secção estabelecemos que o limite usado na Definição 5.4.8 para definir a medida da área de uma região é um caso particular do limite usado na Definição 5.5.2, para definir a integral definida. Na discussão sobre área, o intervalo $[a, b]$ foi dividido em n subintervalos de igual comprimento. Tal partição do intervalo $[a, b]$ é chamada de **partição regular**. Se Δx for o comprimento de cada subintervalo em uma partição regular, então cada $\Delta_i x = \Delta x$ e a norma da partição será Δx. Fazendo essas substituições em (5), temos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x \tag{6}$$

Além disso,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$$

A razão de $\lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$ é que $b > a$ e Δx tende a zero através de valores positivos (pois $\Delta x > 0$). Desses limites concluímos que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{é equivalente a} \quad n \to +\infty$$

Assim, temos da expressão em (6) e dessa afirmativa

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x \tag{7}$$

Deve ser lembrado que ξ_i pode ser qualquer ponto no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Comparando o limite usado na Definição 5.4.8, que dá a medida da área de uma região, com o limite do segundo membro de (7), temos no primeiro caso

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \tag{8}$$

onde $f(c_i)$ é o valor funcional mínimo absoluto em $[x_{i-1}, x_i]$. No segundo caso, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x \tag{9}$$

onde ξ_i é qualquer número em $[x_{i-1}, x_i]$.

Como a função f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 5.5.3, $\int_a^b f(x)\, dx$ existe; logo, essa integral definida é o limite de todas as somas de Riemann de f em $[a, b]$, inclusive aquelas que aparecem em (8) e (9). Por causa disso, vamos redefinir a área de uma região de uma forma mais geral.

5.5.4 DEFINIÇÃO Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

$$\Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)\, dx$$

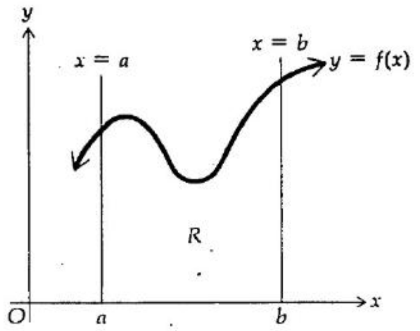

FIGURA 4

Essa definição estabelece que se $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ poderá ser interpretada geometricamente como a medida da área da região R mostrada na Figura 4.

A relação (7) pode ser usada para encontrarmos o valor exato de uma integral definida, conforme é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache o valor exato da integral definida $\int_1^3 x^2\, dx$. Interprete geometricamente o resultado.

Solução Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1, 3]$ em n subintervalos. Então $\Delta x = 2/n$.

Se escolhermos ξ_i como o extremo direito de cada subintervalo, teremos:

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

Como $f(x) = x^2$,

$$f(\xi_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2$$

Logo, usando (7) e aplicando os teoremas da Secção 5.4, teremos

$$\int_1^3 x^2\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4ni + 4i^2)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2 + 3n + 1)}{3}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2}\right]$$

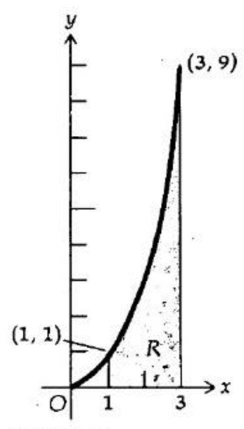

FIGURA 5

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right]$$
$$= 6 + 0 + \tfrac{8}{3} + 0 + 0$$
$$= \tfrac{26}{3}$$

Vamos interpretar geometricamente o resultado. Como $x^2 \geqslant 0$ para todo x em $[1, 3]$, a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$ tem $\frac{26}{3}$ unidades quadradas de área.(*) A região está mostrada na Figura 5.

Na Definição 5.5.2 o intervalo fechado $[a, b]$ é dado e assim supomos que $a < b$. Para considerar a integral definida de uma função f de a até b onde $a > b$ ou $a = b$, temos as definições a seguir.

5.5.5 DEFINIÇÃO Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

se $\int_b^a f(x)dx$ existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 1 mostramos que $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}$. Logo, da Definição 5.5.5,

$$\int_3^1 x^2\,dx = -\int_1^3 x^2\,dx = -\tfrac{26}{3}$$ ◀

5.5.6 DEFINIÇÃO Se $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Da definição 5.5.6,

$$\int_1^1 x^2\,dx = 0$$ ◀

Como afirmamos anteriormente, uma função pode ser integrável em um intervalo fechado, apesar de ser descontínua nele. Tal situação ocorre no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Seja $[a, b]$ qualquer intervalo para o qual $a < 0 < b$. Mostre que f é descontínua em $[a, b]$ e, ainda assim, integrável em $[a, b]$.

Solução Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, mas $f(0) = 1$, f é descontínua em 0 e, portanto, descontínua em $[a, b]$.

* **N. do T.:** As unidades de área são unidades de comprimento ao quadrado e, por isso, são também chamadas de unidades quadradas.

Para provar que f é integrável em $[a, b]$, vamos mostrar que a Definição 5.5.1 está satisfeita. Consideremos as somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\, \Delta_i x$$

Se nenhum dos números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ for nulo, então a soma de Riemann será zero. Vamos supor que $\xi_j = 0$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x = 1 \cdot \Delta_j x$$

Em qualquer um dos casos,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \right| \leqslant \|\Delta\|$$

Logo,

$$\text{se } \|\Delta\| < \epsilon \quad \text{então} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - 0 \right| < \epsilon$$

Comparando o resultado acima com a Definição 5.5.1 onde $\delta = \epsilon$ e $L = 0$, vemos que f é integrável em $[a, b]$.

Observe que a função f do Exemplo 2 tem um número finito (somente 1) de descontinuidades em $[a, b]$ e $|f(x)| \leqslant 1$ para todo x em $[a, b]$. Essa função f pertence ao conjunto das funções que são integráveis em um intervalo fechado. Outras três funções desse conjunto estão nos Exercícios 36 - 38.

EXERCÍCIOS 5.5

Nos Exercícios de 1 a 9, ache a soma de Reimann para a função no intervalo, usando a partição Δ dada e os valores de ξ_i dados. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo dado e mostre os retângulos cujas medidas de área são os termos da soma de Riemann. (Veja a Ilustração 1 e 2 Figura 2.)

1. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{1}{4}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{1}{2}$

2. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2\frac{3}{4}$, $x_5 = 3$; $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_4 = 2\frac{1}{4}$, $\xi_5 = 2\frac{3}{4}$

3. $f(x) = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{3}{4}$

4. $f(x) = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$; $\xi_1 = -\frac{1}{2}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{2}{3}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$

5. $f(x) = x^2 - x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}7$, $x_4 = 1$; $\xi_1 = 0{,}1$, $\xi_2 = 0{,}4$, $\xi_3 = 0{,}6$, $\xi_4 = 0{,}9$

6. $f(x) = 1/(x + 2)$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$, $x_6 = 2\frac{1}{4}$, $x_7 = 2\frac{3}{4}$, $x_8 = 3$; $\xi_1 = -\frac{3}{4}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{1}{4}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$, $\xi_6 = 2$, $\xi_7 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_8 = 3$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi$, $x_3 = \frac{2}{3}\pi$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$, $x_5 = \pi$; $\xi_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\xi_2 = \frac{1}{3}\pi$, $\xi_3 = \frac{1}{2}\pi$, $\xi_4 = \frac{3}{4}\pi$, $\xi_5 = \frac{5}{6}\pi$.

8. $f(x) = 3 \cos \frac{1}{2}x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; para Δ: $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{7}{12}\pi$, $x_5 = \pi$; $\xi_1 = -\frac{2}{3}\pi$, $\xi_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \frac{1}{2}\pi$, $\xi_5 = \frac{2}{3}\pi$

9. $f(x) = [\![x]\!] + 2$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = -3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = -2{,}5$, $\xi_2 = -0{,}5$, $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = 2{,}5$

Nos Exercícios de 10 a 18, ache o valor exato da integral definida. Use o método do Exemplo 1 desta secção.

10. $\int_2^7 3x\, dx$ **11.** $\int_0^2 x^2\, dx$ **12.** $\int_2^4 x^2\, dx$

13. $\int_1^2 x^3\, dx$ **14.** $\int_0^5 (x^3 - 1)\, dx$

15. $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\, dx$ **16.** $\int_0^4 (x^2 + x - 6)\, dx$

17. $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\, dx$ **18.** $\int_{-2}^1 x^4\, dx$

Nos Exercícios de 19 a 28, ache a área exata da região da seguinte forma: (a) expresse a medida da área como o limite de uma soma de Riemann com partições regulares, (b) expresse esse li-

mite com a notação de integral definida; (c) calcule a integral definida pelo método desta secção e faça uma escolha adequada de ξ_i. Desenhe uma figura mostrando a região.

19. Limitada pela reta $y = 2x - 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$.
20. Limitada pela reta $y = 2x - 6$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 7$.
21. Limitada pela reta $y = -3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -5$ e $x = -1$.
22. Limitada pela reta $y = 3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -4$ e $x = -1$.
23. Limitada pela curva $y = 4 - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$.
24. Limitada pela curva $y = (x + 3)^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 0$.
25. Limitada pela curva $y = 12 - x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 2$.
26. Limitada pela curva $y = 10 + x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$.
27. Limitada pela curva $y = x^3 - 4$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = -1$.
28. Limitada pela curva $y = 6x + x^2 - x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 3$.

Nos Exercícios de 29 a 32, dê o valor aproximado da integral definida, usando uma calculadora para determinar, até quatro casas decimais, a soma de Riemann correspondente, com uma partição regular de n subintervalos e ξ_i como o extremo esquerdo ou direito (conforme estiver indicado) de cada subintervalo.

29. $\int_2^5 \frac{1}{x^2}\, dx$, $n = 9$, ξ_i é o extremo direito.
30. $\int_3^4 \frac{1}{x}\, dx$, $n = 10$, ξ_i é o extremo esquerdo.
31. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\, dx$, $n = 8$, ξ_i é o extremo esquerdo.
32. $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx$, $n = 6$, ξ_i é o extremo direito.
33. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = x^2$.)
34. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[1, 2]$.)
35. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{(i+n)^2}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $[1, 2]$.)
36. Seja $[a, b]$ qualquer intervalo tal que $a < 0 < b$. Prove que mesmo que a função escada unitária (Exercício 24 nos Exercícios 2.3) seja descontínua em $[a, b]$, ela será integrável nesse intervalo e $\int_a^b u(x)dx = b$.
37. Prove que a função sinal é descontínua em $[-1, 1]$ e mesmo assim é integrável nesse intervalo. Mostre também que $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx = 0$.
38. Prove que a função maior inteiro é descontínua em $[0, \frac{3}{2}]$ e mesmo assim é integrável nesse intervalo. Mostre também que $\int_0^{3/2} [\![x]\!]\, dx = \frac{1}{2}$.

5.6 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

O cálculo de uma integral definida a partir da definição, determinando realmente o limite de uma soma conforme fizemos na Secção 5.5, em geral é muito trabalhoso e, freqüentemente, impossível. Para estabelecer um método mais simples, precisamos desenvolver antes algumas propriedades da integral definida. Em primeiro lugar precisamos dos teoremas a seguir, sobre as somas de Riemann.

5.6.1 TEOREMA Se Δ for qualquer partição do intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

Prova

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b - a) &= (b - a) - (b - a)\\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, qualquer escolha de $\delta > 0$ garante que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b - a)\right| < \epsilon$$

Assim, pela Definição 5.5.1.

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$ ■

5.6.2 TEOREMA Se f for definida no intervalo fechado $[a, b]$, e se

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

existe, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$, então se k for uma constante qualquer,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\, \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 43).

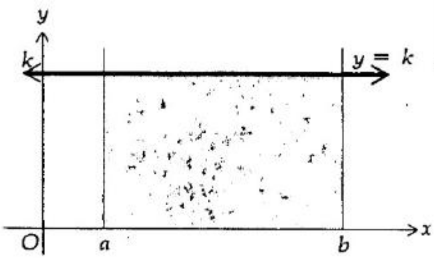

FIGURA 1

► **ILUSTRAÇÃO 1** Consulte a Figura 1. Se $k > 0$, a integral definida $\int_a^b k\, dx$ dará a medida da área da região sombreada, que é um retângulo cujas dimensões são k unidades e $(b - a)$ unidades. Este fato é uma interpretação geométrica do teorema a seguir, quando $k > 0$. ◄

5.6.3 TEOREMA Se k for qualquer constante, então

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a)$$

Prova Pela Definição 5.5.2,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Se $f(x) = k$ para todo x em $[a, b]$, temos dessa equação

$$\begin{aligned} \int_a^b k\, dx &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, \Delta_i x \\ &= k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.2)} \\ &= k(b - a) \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.1)} \end{aligned}$$ ■

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int_{-3}^{5} 4\, dx$$

Solução Aplicamos o Teorema 5.6.3.

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{5} 4\, dx &= 4[5 - (-3)] \\ &= 4(8) \\ &= 32 \end{aligned}$$

5.6.4 TEOREMA Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e se k for uma constante qualquer, então

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

Prova Como f é integrável em $[a, b]$, $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$ existe; assim, pelo Teorema 5.6.2,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Logo,

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$ ■

Note a semelhança entre o teorema a seguir e o Teorema 4 (2.2.4), relativo ao limite da soma de duas funções. Note também a semelhança entre as demonstrações de ambos os teoremas.

5.6.5 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Prova As funções f e g são integráveis em $[a, b]$; seja então

$$\int_a^b f(x)\, dx = M \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\, dx = N$$

Para provar que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = M + N$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todas as partições Δ e para todo ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\, \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon$$

Como

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \quad \text{e} \quad N = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x$$

segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tais que para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$ se $\|\Delta\| < \delta_1$ e $\|\Delta\| < \delta_2$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então para qualquer $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad (1)$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right) \right|$$
$$\leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| \qquad (2)$$

Das desigualdades (1) e (2), temos

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta_i x\right) - (M + N)\right| < \epsilon \tag{3}$$

Do Teorema 5.4.4,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Assim, substituindo essa igualdade em (3) podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$ onde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta_i x - (M + N)\right| < \epsilon$$

Isso prova que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$ ■

O sinal mais (+) do enunciado do Teorema 5.6.5 pode ser substituído por um sinal menos (−), como resultado da aplicação do Teorema 5.6.4, onde $k = -1$.

O Teorema 5.6.5 pode ser estendido a qualquer número de funções. Isto é, se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ forem todas integráveis em $[a, b]$, então $(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx}$$

EXEMPLO 2 Use o resultado do Exemplo 1, Secção 5.5 e o fato de que $\int_1^3 x\,dx = 4$ para calcular $\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)\,dx$.

Solução No Exemplo 1, Secção 5.5, tínhamos o resultado

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}$$

Das propriedades da integral definida,

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)\,dx &= \int_1^3 3x^2\,dx - \int_1^3 5x\,dx + \int_1^3 2\,dx\\ &= 3\int_1^3 x^2\,dx - 5\int_1^3 x\,dx + 2(3-1)\\ &= 3(\tfrac{26}{3}) - 5(4) + 4\\ &= 26 - 20 + 4\\ &= 10\end{aligned}$$

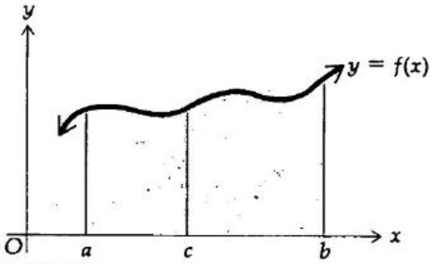

FIGURA 2

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Uma interpretação geométrica do Teorema 5.6.6, a seguir é mostrada na Figura 2, onde $f(x) \geqslant 0$. Para todo x em $[a, b]$, a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$ e o eixo x de a até b é igual à soma das medidas das áreas das regiões de a até c e de c até b. ◀

5.6.6 TEOREMA Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

onde $a < c < b$.

Prova Seja Δ uma partição de $[a, b]$. Vamos formar a partição Δ' de $[a, b]$ como segue. Se c for um dos pontos da partição Δ (isto é, $c = x_i$ para algum i), então Δ' será igual a Δ. Se c não for um dos pontos da partição Δ, mas estiver contido no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a partição Δ' terá como pontos todos os pontos da partição Δ e mais o ponto c. Logo, os subintervalos da partição Δ' serão os mesmos de Δ, com exceção do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de Δ que fica dividido em $[x_{i-1}, c]$ e $[c, x_i]$.

Se $\|\Delta'\|$ for a norma de Δ' e se $\|\Delta\|$ for a norma de Δ, então

$$\|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\|$$

Se na partição Δ' o intervalo $[a, c]$ for dividido em r subintervalos e o intervalo $[c, b]$ for dividido em $(n - r)$ subintervalos, então a parte da partição Δ' de a até c dará uma soma de Riemann da forma

$$\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

e a outra parte da partição Δ', de c até b, dá a soma de Riemann da forma

$$\sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Usando a definição de integral definida e as propriedades da somatória, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \\
&= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \left[\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\, \Delta_i x + \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \right] \\
&= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\, \Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x
\end{aligned}$$

Como $0 < \|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\|$, podemos substituir $\|\Delta\| \to 0$ por $\|\Delta'\| \to 0$, dando

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta'\| \to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\, \Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\| \to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Aplicando a definição de integral definida ao segundo membro da expressão acima, teremos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad \blacksquare$$

O resultado do Teorema 5.6.6 é verdadeiro para qualquer ordenação dos números a, b e c. Isto será enunciado como um outro teorema.

5.6.7 TEOREMA Se f for integrável num intervalo fechado contendo os números a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4}$$

não importando a ordem de a, b e c.

Prova Se a, b e c forem distintos, existirão seis maneiras possíveis de ordenação desses números: $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, e $c < b < a$. A segunda ordem, $a < c < b$, é o Teorema 5.6.6. Vamos usá-lo para provar que (4) é válida para outras ordenações.

Suponha que $a < b < c$; então, do Teorema 5.6.6, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{5}$$

Da Definição 5.5.5,

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

Substituindo-a em (5), obtemos

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

que é o resultado desejado.

As demonstrações para as quatro outras ordenações são semelhantes e serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios de 44 a 47).

Há também a possibilidade de que dois dos três números sejam iguais; por exemplo, $a = c < b$. Então

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^a f(x)\,dx \\ &= 0 \quad \text{(pela Definição 5.5.6)}\end{aligned}$$

Também, como $a = c$,

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Logo,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = 0 + \int_a^b f(x)\,dx$$

que é o resultado desejado. ■

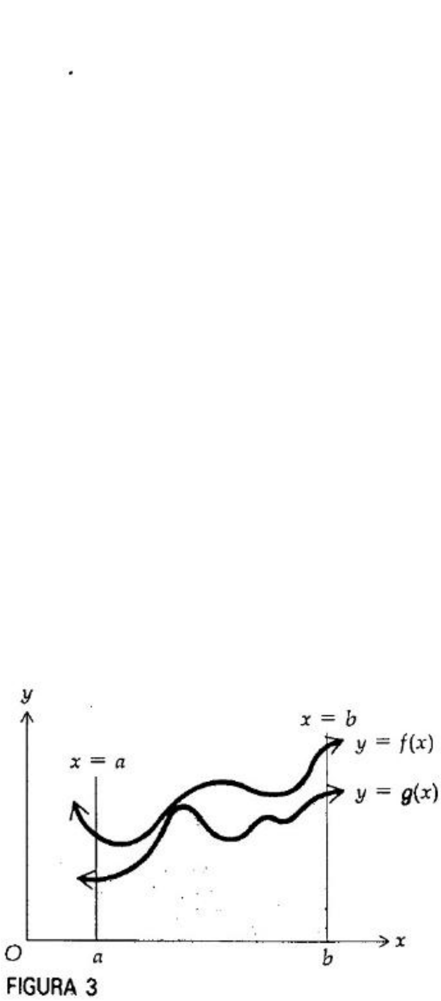

FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Na Figura 3, $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$; $\int_a^b g(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = g(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Na figura, vemos que a primeira área é maior do que a segunda. Temos a interpretação geométrica do teorema a seguir, quando $f(x)$ e $g(x)$ são não-negativas em $[a, b]$.

5.6.8 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Prova Como f e g são integráveis em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$, ambas existem. Logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b [-g(x)]\,dx \quad \text{(pelo Teorema 5.6.4)}$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad \text{(pelo Teorema 5.6.5)}$$

Seja h a função definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Então $h(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, pois $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$.

Queremos provar que $\int_a^b h(x) \geqslant 0$. Como

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x$$

vamos supor que

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x = L < 0 \tag{6}$$

Então, pela Definição 5.5.1, com $\epsilon = -L$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \left|\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right| < -L \tag{7}$$

Mas como

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right|$$

de (7), temos que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \sum_{=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L < -L$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x < 0$$

Mas essa afirmativa é impossível, pois $h(\xi_i)$ é sempre não-negativo e $\Delta_i x > 0$; assim, temos uma contradição à nossa hipótese (6). Assim sendo, (6) é falsa e

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x \geqslant 0$$

$$\int_a^b h(x) \geqslant 0$$

Como $h(x) = f(x) - g(x)$, segue que

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

■

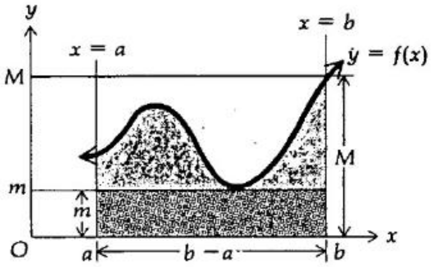

FIGURA 4

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Na Figura 4, $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, m e M são, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$. A integral $\int_a^b f(x)\, dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Essa área é maior do que a do retângulo, cujas dimensões são m e $(b - a)$ e menor do que a do retângulo cujas dimensões são M e $(b - a)$. Assim, temos a interpretação geométrica do próximo teorema se $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. ◀

5.6.9 TEOREMA Vamos supor que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se m e M forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, ou seja

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{para } a \leqslant x \leqslant b$$

então,

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b - a)$$

Prova Como f é contínua em $[a, b]$, o teorema do valor extremo garante a existência de m e de M.

Pelo Teorema 5.6.3,

$$\int_a^b m\, dx = m(b - a) \tag{8}$$

e

$$\int_a^b M\, dx = M(b - a) \tag{9}$$

Como f é contínua em $[a, b]$, segue do Teorema 5.5.3 que f é integrável em $[a, b]$. Então, como $f(x) \geqslant m$ para todo x em $[a, b]$, temos do Teorema 5.6.8

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b m\, dx$$

e de (8), segue que

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant m(b - a) \tag{10}$$

Da mesma forma, como $M \geqslant f(x)$ para todo x em $[a, b]$, segue do Teorema 5.6.8 que

$$\int_a^b M\, dx \geqslant \int_a^b f(x)\, dx$$