é uma função de produção. Trace o mapa de contorno de f mostrando as curvas de produção constantes para z igual a 30, 24, 18, 12 e 6.

52. A temperatua t em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é dada por $t(x, y) = 4x^2 + 2y^2$. Trace as isotermas de t em 12, 8, 4, 1 e 0.

Nos Exercícios 53 e 54, faça esboços das superfícies de nível da função f nos números dados.

53. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ em 8, 4, 0, -4 e -8.

54. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em 9, 4, 1 e 0.

16.2 LIMITES DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Em R, a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre dois números reais. Isto é, $|x - a|$ é a distância entre os pontos x e a. Em R^2, a distância entre os pontos $P(x, y)$ e $P_0(x_0, y_0)$ é dada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Em R^3, a distância entre dois pontos $P(x, y, z)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é dada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Em R^n, a distância entre dois pontos é definida analogamente.

16.2.1 DEFINIÇÃO

Se $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ forem dois pontos em R^n, então a distância entre P e A, denotada por $\|P - A\|$, será dada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$

O símbolo $\|P - A\|$ representa um número não-negativo, sendo lido como "a distância entre P e A".

Em R, R^2 e R^3, a fórmula da Definição 16.2.1 torna-se, respectivamente

$$\|x - a\| = |x - a|$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

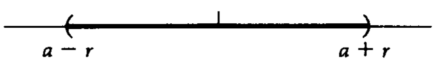
$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

16.2.2 DEFINIÇÃO

Se A for um ponto em R^n e r for um número positivo, então a **bola aberta** $B(A; r)$ será definida como o conjunto de todos os pontos P em R^n, tais que $\|P - A\| < r$.

16.2.3 DEFINIÇÃO

Se A for um ponto em R^n e r for um número positivo, então a **bola fechada** $B[A; r]$ será definida como o conjunto de todos os pontos P em R^n, tais que $\|P - A\| \leqslant r$.

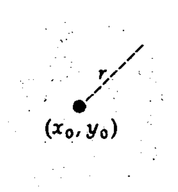


bola aberta $B(a; r)$ em R

FIGURA 1

bola fechada $B[a; r]$ em R

FIGURA 2



bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ em R^2

FIGURA 3

Para ilustrar essas definições, vamos mostrar o seu significado em R, R^2 e R^3. Primeiro, se a for um ponto em R, então a bola aberta $B(a; r)$ será o conjunto de todos os pontos x em R, tais que

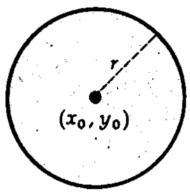
$$|x - a| < r$$

O conjunto de todos os pontos x satisfazendo essa desigualdade é o conjunto de todos os pontos no intervalo aberto $(a - r, a + r)$; assim, a bola aberta $B(a; r)$ em R (veja a Figura 1) é simplesmente um intervalo aberto, tendo seu ponto médio em a e extremos em $a - r$ e $a + r$. A bola fechada $B[a; r]$ em R (Figura 2) é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$.

Se (x_0, y_0) for um ponto em R^2, então a bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ será o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2, tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Assim, a bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ em R^2 (Figura 3) consiste em todos os pontos no interior da região limitada pela circunferência tendo seu centro em (x_0, y_0) e raio r. Uma bola aberta em R^2 é algumas vezes chamada de *disco*



bola fechada $B[(x_0, y_0); r]$ em R^2
FIGURA 4

aberto. A bola fechada ou disco fechado $B[(x_0, y_0); r]$ em R^2 (Figura 4) é o conjunto de todos os pontos na bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ e sobre a circunferência, tendo seu centro em (x_0, y_0) e raio r.

Se (x_0, y_0, z_0) for um ponto em R^3, então a bola aberta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ será o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em R^3, tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r$$

Portanto, a bola aberta em $B((x_0, y_0, z_0); r)$ em R^3 (Figura 5), consiste em todos os pontos no interior da região limitada pela esfera, tendo seu centro em (x_0, y_0, z_0) e raio r. Analogamente, a bola fechada $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ em R^3 (Figura 6) consiste em todos os pontos na bola aberta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ e sobre a esfera tendo seu centro em (x_0, y_0, z_0) e raio r.

Estamos agora em condições de definir o *limite de uma função de n variáveis.*

16.2.4 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de n variáveis que está definida numa bola aberta $B(A; r)$, exceto possivelmente no próprio ponto A. Então, o **limite de $f(P)$ quando P tende a A é L**, e escrevemos

$$\lim_{P \to A} f(P) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \|P - A\| < \delta \text{ então } |f(P) - L| < \epsilon$$

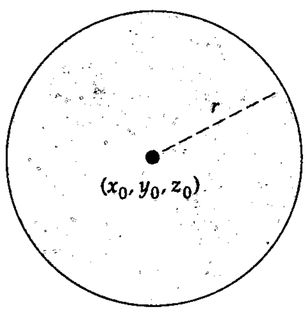


FIGURA 5

Se f for uma função de uma variável e se na definição acima $A = a$ em R e $P = x$, então a definição afirma que: se f for definida em algum intervalo aberto com centro em a, exceto possivelmente no próprio a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para qualquer $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Assim sendo, a Definição 2.1.1 de limite de uma função de uma variável é um caso particular da Definição 16.2.4.

Vamos estabelecer agora a definição de limite de uma função de duas variáveis. Ela é o caso particular da Definição 16.2.4, onde A é o ponto (x_0, y_0) e P é o ponto (x, y).

16.2.5 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de duas variáveis que está definida em algum disco aberto $B(x_0, y_0); r)$, exceto possivelmente no próprio ponto (x_0, y_0). Então, o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é L**, e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

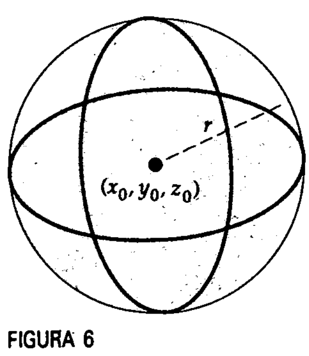


FIGURA 6

Em outros termos, a Definição 16.2.5 estabelece que os valores funcionais $f(x, y)$ tendem a um limite L quando o ponto (x, y) tende ao ponto (x_0, y_0), se o valor absoluto da diferença entre $f(x, y)$ e L puder se tornar arbitrariamente pequeno, tomando o ponto (x, y) suficientemente próximo de (x_0, y_0), mas não igual a (x_0, y_0). Na definição, nada há sobre o valor da função no ponto

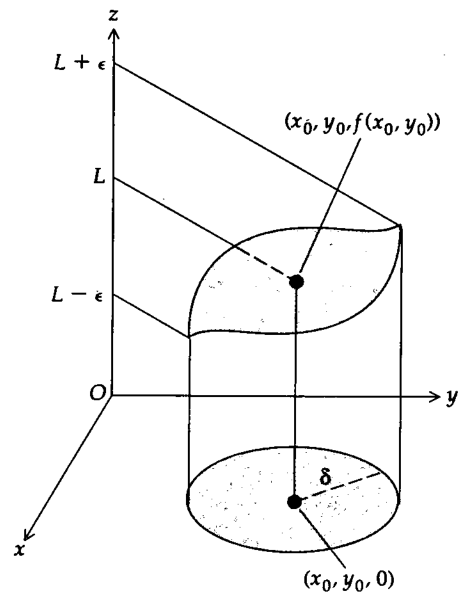


FIGURA 7

(x_0, y_0); isto é, não é necessário que a função esteja definida em (x_0, y_0) para existir $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$.

Uma interpretação geométrica da Definição 16.2.5 está ilustrada na Figura 7. Nela é mostrada a parte da superfície definida por $z = f(x, y)$ que fica sobre o disco aberto $B((x_0, y_0); \delta))$. Vemos que $f(x, y)$ no eixo z ficará entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, enquanto o ponto (x, y) no plano xy estiver no disco aberto $B((x_0, y_0); \delta)$, ou seja, o valor de $f(x, y)$ no eixo z pode ser mantido entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$ desde que o ponto (x, y) no plano xy seja restrito ao disco aberto $B((x_0, y_0); \delta)$.*

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a Definição 16.2.5 para provar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11$$

O primeiro requisito da definição é que $2x + 3y$ deve estar definida em algum disco aberto tendo seu centro no ponto (1, 3), com exclusão, talvez, do próprio ponto (1, 3). Como $2x + 3y$ está definida para todos os pontos (x, y), qualquer disco aberto com seu centro em (1, 3) irá satisfazer esse requisito. Agora, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |(2x + 3y) - 11| < \epsilon \tag{1}$$

Da desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |2x + 3y - 11| &= |2x - 2 + 3y - 9| \\ &\leqslant 2|x - 1| + 3|y - 3| \end{aligned}$$

Como

$$|x - 1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \quad \text{e} \quad |y - 3| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

segue que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \quad \text{então} \quad 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para δ é $5\delta = \epsilon$, isto é, $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \\ \Rightarrow \quad & |x - 1| < \delta \quad \text{e} \quad |y - 3| < \delta \\ \Rightarrow \quad & 2|x - 1| + 3|y - 3| < 5\delta \\ \Rightarrow \quad & |2(x - 1) + 3(y - 3)| < 5(\tfrac{1}{5}\epsilon) \\ \Rightarrow \quad & |2x + 3y - 11| < \epsilon \end{aligned}$$

Demonstramos que para todo $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$, a afirmativa (1) é verdadeira. Isto prova que $\lim\limits_{(x, y) \to (1, 3)} (2x + 3y) = 11$. ◀

EXEMPLO 1 Use a Definição 16.2.5 para provar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 + y) = 5$$

Solução Como $3x^2 + y$ está definida em todo ponto (x, y), qualquer disco aberto tendo seu centro em (1, 2) irá satisfazer o primeiro requisito da Defi-

* **N. do T.**: A existência do limite da função $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) não depende da forma pela qual (x, y) aproxima-se de (x_0, y_0). Observe que existe uma infinidade de maneiras para (x, y) aproximar-se de (x_0, y_0).

nição 16.2.5. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |(3x^2 + y) - 5| < \epsilon \tag{2}$$

Da desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |3x^2 + y - 5| &= |3x^2 - 3 + y - 2| \\ &\leqslant 3|x^2 - 1| + |y - 2| \end{aligned}$$

Assim,

$$|3x^2 + y - 5| \leqslant 3|x - 1||x + 1| + |y - 2| \tag{3}$$

Como

$$|x - 1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \quad \text{e} \quad |y - 2| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

segue que

$$\text{se} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{e} \quad |y - 2| < \delta$$

Observe que no segundo membro de (3), além das expressões $|x - 1|$ e $|y - 2|$, temos a expressão $|x + 1|$. Assim, para provar (2) queremos colocar uma restrição em δ que irá nos dar uma desigualdade envolvendo $|x + 1|$. Para isso escolhemos o raio do disco aberto requerido pela Definição 16.2.5 menos ou igual a 1. Então,

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant 1 \\ \Rightarrow \quad & |x - 1| < 1 \\ \Rightarrow \quad & -1 < x - 1 < 1 \\ \Rightarrow \quad & 1 < x + 1 < 3 \\ \Rightarrow \quad & |x + 1| < 3 \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} & |x - 1| < \delta \quad \text{e} \quad |x + 1| < 3 \quad \text{e} \quad |y - 2| < \delta \\ \Rightarrow \quad & 3|x - 1||x + 1| + |y - 2| < 3 \cdot \delta \cdot 3 + \delta \end{aligned}$$

Como nossa meta é ter $3|x - 1||x + 1| + |y - 2| < \epsilon$, devemos exigir $10\delta \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant \frac{1}{10}\epsilon$. Isso significa que devemos colocar duas restrições em δ: $\delta \leqslant 1$ e $\delta \leqslant \frac{1}{10}\epsilon$. Para que ambas as restrições estejam satisfeitas, tomamos $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta = \min(1, \tfrac{1}{10}\epsilon) \\ \Rightarrow \quad & |x - 1| < \tfrac{1}{10}\epsilon \quad \text{e} \quad |x - 1| < 1 \quad \text{e} \quad |y - 2| < \tfrac{1}{10}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & |x - 1| < \tfrac{1}{10}\epsilon \quad \text{e} \quad |x + 1| < 3 \quad \text{e} \quad |y - 2| < \tfrac{1}{10}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & 3|x - 1||x + 1| + |y - 2| < 3 \cdot \tfrac{1}{10}\epsilon \cdot 3 + \tfrac{1}{10}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & |3(x - 1)(x + 1) + y - 2| < \epsilon \\ \Rightarrow \quad & |(3x^2 + y) - 5| < \epsilon \end{aligned}$$

Demonstramos que para todo $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$, a afirmativa (2) é verdadeira. Isso prova que $\lim\limits_{(x, y) \to (1, 2)} (3x^2 + y) = 5$.

Os teoremas de limite da Secção 2.2 e suas demonstrações, com pequenas modificações, aplicam-se a funções de mais de uma variável. Por exemplo, correspondendo ao Teorema de Limite 1 da Secção 2.2, temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (mx + ny + d) = ma + nb + d$$

e a demonstração é uma generalização da que foi feita na Ilustração 1. Vamos usar os teoremas de limite sem enunciá-los novamente e sem prová-los.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicando os teoremas de limite de somas e produtos,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2\\ &= 1\end{aligned}$$
◀

EXEMPLO 2 Ache

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2)\\ &= 0 - 0\\ &= 0\end{aligned}$$

O teorema a seguir é análogo ao Teorema 2.7.1 para funções de uma variável e trata do limite de uma função composta de duas variáveis.

16.2.6 TEOREMA Se g for uma função de duas variáveis, para a qual $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = b$ e se f for uma função de uma única variável contínua em b, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \circ g)(x, y) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x, y)) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)\right)$$

A demonstração desse teorema é semelhante à que foi feita para o Teorema 2.7.1 e será deixada como um exercício (veja o Exercício 31).

EXEMPLO 3 Use o Teorema 16.2.6 para encontrar $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln (xy - 1)$.

Solução Seja g a função tal que $g(x, y) = xy - 1$, e seja f a função tal que $f(t) = \ln t$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy - 1) = 1$$

e como f é contínua em 1, do Teorema 16.2.6,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1) &= \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy-1)\right)\\ &= \ln 1\\ &= 0\end{aligned}$$

Vamos introduzir agora o conceito de *ponto de acumulação*, necessário ao prosseguimento da discussão de limite de funções de duas variáveis.

16.2.7 DEFINIÇÃO Dizemos que um ponto P_0 é um **ponto de acumulação** de um conjunto S de pontos em R^n se toda bola aberta $B(P_0; r)$ contiver uma infinidade de pontos de S.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se S for o conjunto de todos os pontos em R^2 no lado positivo do eixo x, a origem será um ponto de acumulação de S pois, não importando quão pequeno tomarmos o valor de r, todo disco aberto com centro na origem e raio r irá conter uma infinidade de pontos de S. Esse é um exemplo de um conjunto tendo um ponto de acumulação que não pertence ao conjunto. Qualquer ponto do conjunto S será também um ponto de acumulação de S. ◀

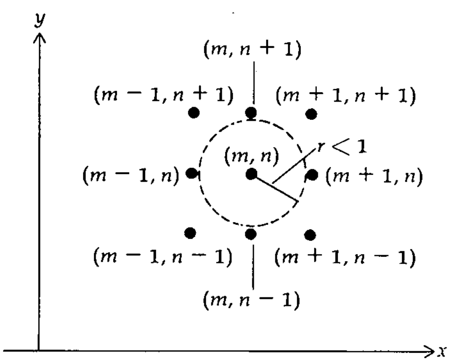


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se S for o conjunto de todos os pontos em R^2 para os quais as coordenadas cartesianas são inteiros positivos, então esse conjunto não terá pontos de acumulação. Isso pode ser visto se considerarmos os pontos (m, n), onde m e n são inteiros positivos. Então, um disco aberto tendo seu centro em (m, n) e raio menor do que 1 não contém nenhum outro ponto de S exceto (m, n); assim, a Definição 16.2.7 não será satisfeita (veja a Figura 8). ◀

Consideraremos agora o limite de uma função de duas variáveis quando um ponto (x, y) aproxima-se de um ponto (x_0, y_0), onde (x, y) está restrito a um determinado conjunto de pontos.

16.2.8 DEFINIÇÃO Seja f a função definida em um conjunto de pontos S em R^2, e seja (x_0, y_0) um ponto de acumulação de S. Então, o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) em S é L**, o que escrevemos na forma

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(P \text{ em } S)}} f(x, y) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

e (x, y) está em S.

Em alguns casos, o limite na definição anterior vem a ser o limite de uma função de uma variável. Por exemplo, considere $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Então, se S_1 for o conjunto de todos os pontos no lado positivo do eixo x,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ em } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0^+} f(x, 0)$$

Se S_2 for o conjunto de todos os pontos no lado negativo do eixo y,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ em } S_2)}} f(x, y) = \lim_{y\to 0^-} f(0, y)$$

Se S_3 for o conjunto de todos os pontos no eixo x,

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_3)}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, 0)$$

Se S_4 for o conjunto de todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$,

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_4)}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, x^2)$$

16.2.9 TEOREMA

Suponha que a função f esteja definida para todos os pontos do disco aberto com centro em (x_0, y_0), exceto talvez o próprio (x_0, y_0) e

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Então, se S for um conjunto qualquer em R^2 tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação,

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S)}} f(x, y)$$

existe e tem sempre o valor L.

Prova Como $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$, então, pela Definição 16.2.5, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

O estabelecido acima será verdadeiro se, além disso, restringirmos (x, y) ao conjunto S, onde S é qualquer conjunto de pontos tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação. Logo, pela Definição 16.2.8,

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S)}} f(x, y) = L$$

e L não depende do conjunto S através do qual (x, y) está tendendo a (x_0, y_0). Isso prova o teorema. ■

O teorema a seguir é uma conseqüência imediata do Teorema 16.2.9.

16.2.10 TEOREMA

Se a função f tiver diferentes limites quando (x, y) tender a (x_0, y_0) através de dois conjuntos de pontos tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação, então $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ não existe.

Prova Sejam S_1 e S_2 dois conjuntos distintos de pontos em R^2, tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação, e sejam

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) = L_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) = L_2$$

Suponha agora que $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista. Então, pelo Teorema 16.2.9, L_1 deve ser igual a L_2, mas, por hipótese, $L_1 \neq L_2$ e assim temos uma contradição. Logo, $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ não existe. ■

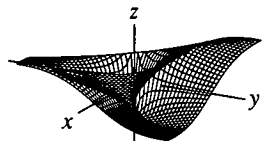


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ache $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, se existir.

Solução A função f está definida em todos os pontos de R^2, exceto em (0, 0). A Figura 9 mostra um gráfico de f gerado por computador. Seja S_1 o conjunto de todos os pontos do eixo x e S_2 o conjunto de todos os pontos da reta $y = x$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, 0) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2 + 0} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0,0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \to (0,0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y)$$

segue do Teorema 16.2.10 que $\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ não existe.

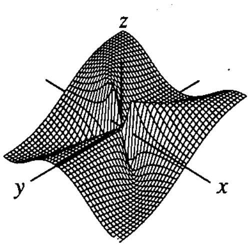


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Dada

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

ache $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, se existir.

Solução A função f está definida em todos os pontos em R^2, exceto (0, 0). A Figura 10 mostra um gráfico de f gerado por computador. Seja S_1 o conjunto de todos os pontos sobre a reta que passa pela origem; isto é, para qualquer ponto (x, y) em S_1, $y = mx$. Seja S_2 o conjunto de todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, mx) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} \\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, x^2) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} \\ &= \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y)$$

segue que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe.

EXEMPLO 6 Dada

$$f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

ache $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, se existir.

Solução A função f está definida em todos os pontos em R^2, exceto $(0, 0)$. Seja S_1 o conjunto de todos os pontos sobre uma reta que passam pela origem; então, se (x, y) for um ponto em S_1, $y = mx$. Seja S_2 o conjunto de todos os pontos na parábola $y = x^2$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(mx)}{x^2 + m^2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3mx}{1 + m^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(x^2)}{x^2 + (x^2)^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^2 + x^4}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 + x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainda que o mesmo limite, 0, seja obtido, se (x, y) tende a $(0, 0)$ através de um conjunto de pontos sobre qualquer reta que passe pela origem, não podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ exista e seja zero, embora isso seja esperado. Vamos tentar, todavia, provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Qualquer disco aberto tendo seu centro na origem irá satisfazer o primeiro requisito da Definição 16.2.5. Se pudermos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon \tag{4}$$

então provamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Como $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ e $|y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| &= \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2}\\ &\leqslant \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Assim, uma escolha adequada é $3\delta = \epsilon$, isto é, $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned}& 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\\ \Rightarrow\quad & \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} < 3\delta\\ \Rightarrow\quad & \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < 3(\tfrac{1}{3}\epsilon)\\ \Rightarrow\quad & \left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon\end{aligned}$$

Assim, se $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$, a afirmação (4) é verdadeira. Logo, provamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

EXERCÍCIOS 16.2

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule o limite dado, usando os teoremas de limite.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2)$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3x - 2y}{x + 4y}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3 + 2y}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x + e^y}{\cos x + \operatorname{sen} y}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y}{e^{2x} + e^{2y}}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^{4/3} - (y-1)^{4/3}}{(x-1)^{2/3} + (y-1)^{2/3}}$

Nos Exercícios de 9 a 16, estabeleça o limite, encontrando um $\delta > 0$ correspondente a qualquer $\epsilon > 0$, tal que a Definição 16.2.5 seja válida.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (3x - 4y) = 1$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (5x - 3y) = -2$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} (3x - 2y) = -9$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} (5x + 4y) = -6$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2) = 2$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x^2 - y^2) = -1$
15. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x^2 + 2x - y) = 4$
16. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2 + y^2 - 4x + 2y) = -4$

Nos Exercícios de 17 a 22, prove que para a função f dada, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe.

17. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
18. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$
19. $f(x, y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$
20. $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$
21. $f(x, y) = \dfrac{x^9y}{(x^6 + y^2)^2}$
22. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$

Nos Exercícios de 23 a 26, prove que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe.

23. $f(x, y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$
24. $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
25. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
26. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Nos Exercícios de 27 a 30, determine se o limite existe.

27. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$
28. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4 + y^4}$
29. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$
30. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$
31. Prove o Teorema 16.2.6.

Nos Exercícios de 32 a 35, mostre uma aplicação do Teorema 16.2.6 no cálculo do limite indicado.

32. $\lim\limits_{(x,y)\to(\ln 3, \ln 2)} e^{x-y}$
33. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$
34. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,3)} [\![5x + \frac{1}{2}y^2]\!]$
35. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\dfrac{1}{3x - 4y}}$
36. (a) Dê uma definição similar à Definição 16.2.5 para o limite de uma função de três variáveis quando um ponto (x, y, z) tende ao ponto (x_0, y_0, z_0). (b) Dê uma definição similar à Definição 16.2.8 para o limite de uma função de três variáveis quando o ponto (x, y, z) tende ao ponto (x_0, y_0, z_0) por um conjunto específico de pontos S de R^3.
37. (a) Enuncie e prove um teorema similar ao Teorema 16.2.9 para uma função f de três variáveis. (b) Enuncie e prove um teorema similar ao Teorema 16.2.10 para uma função f de três variáveis.

Nos Exercícios de 38 a 41, calcule o limite dado, usando os teoremas de limite.

38. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-2,1,4)} (4x^2y - 3xyz^2 + 7y^2z^3)$
39. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \dfrac{\sec xy + \sec yz}{y - \sec z}$
40. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,2,0)} \dfrac{x^2y^2 + y^2z^2}{x^2 + z^2}$
41. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{(e^x + e^y + e^z)^2}{e^{2x} + e^{2y} + e^{2z}}$

Nos Exercícios de 42 a 45, use as definições e teoremas dos Exercícios 36 e 37 para provar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ não existe.

42. $f(x, y, z) = \dfrac{x^3 + yz^2}{x^4 + y^2 + z^4}$
43. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
44. $f(x, y, z) = \dfrac{x^4 + yx^3 + z^2x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$
45. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6 + y^6 + z^6}$

Nos Exercícios 46 e 47, use a definição do Exercício 36(a) para provar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ existe.

46. $f(x, y, z) = \dfrac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
47. $f(x, y, z) = \dfrac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$