Na última secção do capítulo discutimos métodos numéricos para determinar um valor aproximado de uma integral definida. Os cálculos exigidos nesses processos são feitos facilmente por meio de calculadoras programáveis e computadores.

5.1 ANTIDIFERENCIAÇÃO

Você já está familiarizado com *operações inversas*. Adição e subtração, multiplicação e divisão são operações inversas, bem como potenciação e radiciação. Nesta secção, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação chamada de *antidiferenciação*. Vamos começar introduzindo a *antiderivada*.

5.1.1 DEFINIÇÃO Uma função F será chamada de **antiderivada** de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se F for definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

então, $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Assim, se f for a função definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

logo, afirmamos que f é a derivada de F e que F é uma antiderivada de f. Se G for a função definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

então, G também será uma antiderivada de f, pois $G'(x) = 12x^2 + 2x$. Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por $4x^3 + x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f. ◀

Em geral, se uma função F for antiderivada de uma função f num intervalo I e se a função G for definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária, então

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

e G também será uma antiderivada de f no intervalo I.

Passaremos, agora, a demonstrar que se F for qualquer antiderivada particular de f num intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Necessitaremos primeiro de um teorema preliminar.

5.1.2 TEOREMA Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I, então haverá uma constante K, tal que

$$f(x) = g(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Prova Seja h a função definida em I por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

assim sendo, para todo x em I,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Mas, por hipótese, $f'(x) = g'(x)$ para todo x em I. Logo,

$$h'(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Assim, o Teorema 4.3.3 aplica-se à função h e existe uma constante K, tal que

$$h(x) = K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Substituindo $h(x)$ por $f(x) - g(x)$, obtemos

$$f(x) = g(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

e o teorema está provado. ■

O próximo teorema segue, imediatamente, do Teorema 5.1.2.

5.1.3 TEOREMA Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por

$$F(x) + C \tag{1}$$

onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (1), atribuindo-se certos valores a C.

Prova Suponha que G represente qualquer antiderivada de f em I; então

$$G'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \tag{2}$$

Como F é uma antiderivada particular de f em I,

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \tag{3}$$

De (2) e (3), segue que

$$G'(x) = F'(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Logo, pelo Teorema 5.1.2, existe uma constante K, tal que

$$G(x) = F(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Como G representa qualquer antiderivada de f em I, segue que toda antiderivada de f pode ser obtida de $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Assim, está provado o teorema. ■

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{4}$$

onde

$$F'(x) = f(x)$$

e

$$d(F(x)) = f(x)\,dx \tag{5}$$

Leibniz introduziu a convenção de escrever a diferencial de uma função após o símbolo de antidiferenciação. A vantagem dessa notação ficará evidente quando calcularmos antiderivadas, mudando a variável na Secção 5.2. De (4) e (5) podemos escrever

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C}$$

Essa fórmula será usada para obter fórmulas de antidiferenciação nas secções a seguir; ela estabelece que quando antidiferenciamos a diferencial de uma função, obtemos a própria função mais uma constante arbitrária. Assim, podemos considerar que o símbolo de antidiferenciação $\int$ significa a operação inversa da operação denotada por d para o cálculo da diferencial.

Se $\{F(x) + C\}$ for o conjunto de todas as funções cuja diferencial é $f(x)\,dx$, também será o conjunto de todas as funções cujas derivadas são $f(x)$. Assim sendo, a antidiferenciação é considerada como a operação de encontrar o conjunto de todas as funções, tendo uma dada derivada.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação. Assim sendo, os teoremas a seguir podem ser provados a partir dos teoremas correspondentes da diferenciação.

5.1.4 TEOREMA

$$\int dx = x + C$$

5.1.5 TEOREMA

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

onde a é uma constante.

O Teorema 5.1.5 estabelece que para determinar uma antiderivada de uma constante vezes uma função, achamos primeiro uma antiderivada da função, multiplicando-a, em seguida, pela constante.

5.1.6 TEOREMA

Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

O Teorema 5.1.6 estabelece que para determinar uma antiderivada da soma de duas funções, achamos primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos os resultados, ficando subentendido que ambas as funções estão definidas no mesmo intervalo. O Teorema 5.1.6 pode ser estendido a um número qualquer, finito, de funções. Combinando o Teorema 5.1.6 com o Teorema 5.1.5, temos o teorema a seguir.

5.1.7 TEOREMA

Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ estão definidas no mesmo intervalo,

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)]\,dx$$
$$= c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + c_n\int f_n(x)\,dx$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

5.1.8 TEOREMA Se n for um número racional,

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Prova

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$
$$= x^n$$

■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicando o Teorema 5.1.8 para valores específicos de n, temos

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}\,dx &= \int x^{-2}\,dx \\ &= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= -\frac{1}{x} + C\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\int \sqrt[3]{x}\,dx &= \int x^{1/3}\,dx \\ &= \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= \tfrac{3}{4}x^{4/3} + C\end{aligned}$$

◀

A ilustração a seguir mostra como os Teoremas 5.1.4 até 5.1.8 são usados para antidiferenciar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\begin{aligned}\int (3x+5)\,dx &= \int 3x\,dx + \int 5\,dx && \text{(pelo Teorema 5.1.6)} \\ &= 3\int x\,dx + 5\int dx && \text{(pelo Teorema 5.1.5)} \\ &= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2) && \text{(pelos Teoremas 5.1.8 e 5.1.4)} \\ &= \tfrac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)\end{aligned}$$

Como $3C_1 + 5C_2$ é uma constante arbitrária, ela pode ser denotada por C; assim, o resultado pode ser escrito como

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

Pode-se conferir a resposta calculando sua derivada.

$$D_x(\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C) = 3x + 5$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx &= 5\int x^4\,dx - 8\int x^3\,dx + 9\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx\\ &= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 8\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C\\ &= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx &= \int x^{1/2}(x + x^{-1})\,dx\\ &= \int (x^{3/2} + x^{-1/2})\,dx\\ &= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\,dt$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\,dt &= 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\,dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\,dt\\ &= 5\int t^{2/3}\,dt + 7\int t^{-4/3}\,dt\\ &= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C\\ &= 5(\tfrac{3}{5}t^{5/3}) + 7(-3t^{-1/3}) + C\\ &= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C\end{aligned}$$

Os teoremas para a antiderivada das funções seno e co-seno seguem imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação.

5.1.9 TEOREMA $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

Prova $D_x(-\cos x) = -(-\operatorname{sen} x)$
$= \operatorname{sen} x$ ■

5.1.10 TEOREMA $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

Prova $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$ ■

Os teoremas a seguir são conseqüências dos teoremas para as derivadas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante. As demonstrações também são imediatas, obtidas com o cálculo da derivada do segundo membro das fórmulas.

5.1.11 TEOREMA $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

5.1.12 TEOREMA $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

5.1.13 TEOREMA $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$

5.1.14 TEOREMA $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x)\,dx$$

Solução Aplicamos os Teoremas 5.1.13 e 5.1.12.

$$\begin{aligned}\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x)\,dx &= 3 \int \sec x \operatorname{tg} x\,dx - 5 \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx \\ &= 3 \sec x - 5(-\operatorname{cotg} x) + C \\ &= 3 \sec x + 5 \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

As identidades trigonométricas são freqüentemente usadas quando calculamos antiderivadas envolvendo funções trigonométricas. As oito identidades fundamentais a seguir são cruciais:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1 \qquad \cos x \sec x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

Solução

$$\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$
$$= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{cotg} x \, dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$
$$= 2 \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx - 3 \int \operatorname{sen} x \, dx$$
$$= 2(-\operatorname{cosec} x) - 3(-\cos x) + C \qquad \text{(dos Teoremas 5.1.14 e 5.1.9)}$$
$$= -2 \operatorname{cosec} x + 3 \cos x + C$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4)\, dx$$

Solução

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4)\, dx$$
$$= \int [(\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + 4]\, dx$$
$$= \int \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + 2 \int dx$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + 2x + C \qquad \text{(dos Teoremas 5.1.11 e 5.1.12)}$$

Freqüentemente, em aplicações envolvendo antidiferenciação, desejamos encontrar uma antiderivada específica que satisfaça determinadas condições chamadas **inicial** ou **lateral**, conforme elas ocorrem no ponto inicial ou para os pontos extremos do intervalo de definição da variável.* Por exemplo, se uma equação envolvendo $\frac{dy}{dx}$ for dada, bem como a condição inicial de que $y = y_1$ quando $x = x_1$, então depois que o conjunto de todas as antiderivadas for encontrado, se x e y forem substituídos por x_1 e y_1, iremos determinar um valor específico da constante arbitrária C. Com esse valor de C, uma determinada antiderivada é obtida.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que desejemos encontrar uma determinada função $y(x)$ satisfazendo a equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

(ou seja, uma antiderivada da função $f(x) = 2x$)
e a condição inicial de que $y = 6$ quando $x = 2$. Da fórmula

$$y = \int 2x \, dx \quad \text{temos} \quad y = x^2 + C \tag{6}$$

* **N. do T.**: As condições iniciais são também conhecidas como condições de Cauchy, e as condições laterais como condições de contorno, de fronteira ou de extremos.

Em (6), substituímos x por 2 e y por 6, obtendo

$$6 = 4 + C$$
$$C = 2$$

Quando esse valor de C é substituído em (6), obtemos

$$y = x^2 + 2$$

que dá a antiderivada desejada. ◀

EXEMPLO 7 Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Se a curva contém o ponto (3, 7), ache sua equação.

Solução Como a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto (x, y) é o valor da derivada nesse ponto, temos

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 5$$
$$y = \int (4x - 5)\, dx$$
$$y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C$$
$$y = 2x^2 - 5x + C \tag{7}$$

A Equação (7) representa uma *família* de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto (3, 7), substituímos x por 3 e y por 7 em (7), obtendo

$$7 = 2(9) - 5(3) + C$$
$$7 = 18 - 15 + C$$
$$C = 4$$

Substituindo C por 4 em (7), iremos obter a equação da curva pedida, que é

$$y = 2x^2 - 5x + 4$$

Na Secção 3.4 introduzimos as funções custo marginal e rendimento marginal, da economia. Elas são as derivadas primeiras, C' e R' da função custo total C e da função rendimento total R, respectivamente. Assim, C e R podem ser obtidas de C' e R' por antidiferenciação. Ao determinarmos a função C de C', a constante arbitrária pode ser avaliada se conhecermos o custo geral (isto é, o custo quando nenhuma unidade é produzida) ou o custo da produção de um número específico de unidades da mercadoria. Como em geral é verdade que a função rendimento total é zero quando o número de unidades produzidas é zero, esse fato pode ser usado para avaliar a constante arbitrária quando determinamos a função R de R'.

EXEMPLO 8 A função custo marginal C' é dada por

$$C'(x) = 4x - 8$$

quando $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades. Se o custo da produção de 5 unidades for \$ 20, ache a função custo total.

Solução Como $C'(x) = 4x - 8$

$$C(x) = \int (4x - 8)\,dx$$
$$= 2x^2 - 8x + k$$

Como $C(5) = 20$, obtemos $k = 10$. Logo,

$$C(x) = 2x^2 - 8x + 10$$

Observe que como o custo marginal deve ser não-negativo, $4x - 8 \geqslant 0$ ou, de modo equivalente, $x \geqslant 2$. Portanto, o domínio de C é $[2, +\infty)$; lembre-se que embora x represente o número de unidades de uma mercadoria, supomos que x seja um número real para dar os requisitos de continuidade para as funções C e C'.

EXERCÍCIOS 5.1

Nos Exercícios de 1 a 36, faça a antidiferenciação. Nos Exercícios de 1 a 8, de 15 a 18 e de 31 a 34, verifique o resultado, calculando a derivada de sua resposta.

1. $\int 3x^4\,dx$ **2.** $\int 2x^7\,dx$ **3.** $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

4. $\int \frac{3}{t^5}\,dt$ **5.** $\int 5u^{3/2}\,du$ **6.** $\int 10\sqrt[3]{x^2}\,dx$

7. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **8.** $\int \frac{3}{\sqrt{y}}\,dy$ **9.** $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\,dt$

10. $\int 7x^3\sqrt{x}\,dx$ **11.** $\int (4x^3 + x^2)\,dx$

12. $\int (3u^5 - 2u^3)\,du$ **13.** $\int y^3(2y^2 - 3)\,dy$

14. $\int x^4(5 - x^2)\,dx$ **15.** $\int (3 - 2t + t^2)\,dt$

16. $\int (4x^3 - 3x^2 + 6x - 1)\,dx$

17. $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\,dx$

18. $\int (2 + 3x^2 - 8x^3)\,dx$ **19.** $\int \sqrt{x}(x + 1)\,dx$

20. $\int (ax^2 + bx + c)\,dx$ **21.** $\int (x^{3/2} - x)\,dx$

22. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ **23.** $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)dx$

24. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ **25.** $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\,dx$

26. $\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\,dy$ **27.** $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

28. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}}\,dt$ **29.** $\int (3\,\text{sen}\,t - 2\cos t)\,dt$

30. $\int (5\cos x - 4\,\text{sen}\,x)\,dx$ **31.** $\int \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2\,x}\,dx$

33. $\int (4\,\text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x + 2\sec^2 x)\,dx$

34. $\int (3\,\text{cosec}^2\,t - 5\sec t\,\text{tg}\,t)\,dt$

35. $\int (2\,\text{cotg}^2\,\theta - 3\,\text{tg}^2\,\theta)\,d\theta$

36. $\int \frac{3\,\text{tg}\,\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$

37. O ponto (3, 2) está numa curva e em qualquer ponto (x, y) sobre a curva a inclinação da reta tangente é igual a $2x - 3$. Ache uma equação da curva.

38. A inclinação da reta tangente num ponto qualquer (x, y) de uma curva é $3\sqrt{x}$. Se o ponto (9, 4) está na curva, ache uma equação para ela.

39. Os pontos $(-1, 3)$ e $(0, 2)$ estão numa curva e em qualquer ponto (x, y) da curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Ache uma equação da curva. (Sugestão: faça $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$ e obtenha uma equação envolvendo y', x e uma constante arbitrária C_1. Dessa equação, obtenha uma outra envolvendo y, x, C_1 e C_2. Usando as condições, calcule C_1 e C_2.)

40. Uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 3) é $y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$, ache uma equação da curva. Veja a sugestão para o Exercício 39.

41. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ e uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 1) é $y = 2 - x$. Ache uma equação da curva. Veja a sugestão dada no Exercício 39.

42. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\frac{d^3y}{dx^3} = 2$ e (1, 3) é um ponto de inflexão no qual a inclinação da tangente de inflexão é -2. Ache uma equação da curva.

43. A função custo marginal é dada por $C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$, e o custo geral é \$ 6. Ache a função custo total.

44. Uma empresa determinou que a função custo marginal para a produção de certa mercadoria é dada por $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$, onde $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades da mercadoria. Se o custo geral for de \$ 250, qual será o custo da produção de 15 unidades?

45. A função custo marginal é definida por $C'(x) = 6x$, onde $C(x)$ é o número de centenas de unidades monetárias no custo total de x centenas de unidades de certa mercadoria. Se o custo de 200 unidades for \$ 2000, ache (a) a função custo total e (b) o custo geral.

46. A função rendimento marginal para uma certa mercadoria é $R'(x) = 12 - 3x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

47. Para um determinado artigo, a função rendimento marginal é dada por $R'(x) = 15 - 4x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço por unidade, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

48. A eficiência de um operário é dada por uma porcentagem. Por exemplo, se a eficiência do trabalhador num dado intervalo de tempo for de 70%, então ele está trabalhando com 70% de todo o seu potencial. Suponha que E% seja a sua eficiência t horas após começar a trabalhar e que a taxa segundo a qual E está variando é $(35 - 8t)$%, a cada hora. Se a eficiência após 3 h de trabalho for de 81%, ache a sua eficiência após trabalhar (a) 4 h e (b) 8 h.

49. O volume de água num tanque é V m^3 quando a profundidade da água é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de 3 m.

50. Um colecionador de arte comprou uma pintura por \$ 1.000 de um artista cujos trabalhos aumentam de valor em relação ao tempo, de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, onde V é o valor estimado de uma pintura t anos após sua compra. Se essa fórmula for válida pelos próximos 6 anos, qual o valor previsto para a pintura daqui a quatro anos?

51. Seja $f(x) = 1$ para todo x em $(-1, 1)$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Então $f'(x) = 0$ para todo x em $(-1, 1)$ e $g'(x) = 0$, onde quer que exista g' em $(-1, 1)$. Mas, $f(x) \neq g(x) + K$ para x em $(-1, 1)$. Por que o Teorema 5.1.2 não é válido?

52. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

e $F(x) = |x|$. Mostre que $F'(x) = f(x)$ se $x \neq 0$. F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$? Explique.

53. Seja $f(x) = |x|$ e F definida por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Mostre que F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

54. Seja

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Mostre que U não tem uma antiderivada em $(-\infty, +\infty)$. (*Sugestão*: suponha que U tenha uma antiderivada F em $(-\infty, +\infty)$ e uma contradição será obtida se mostrarmos, então, que pelo teorema do valor médio existe um número k, tal que $F(x) = x + k$ se $x > 0$ e $F(x) = k$ se $x < 0$.)

5.2 ALGUMAS TÉCNICAS DE ANTIDIFERENCIAÇÃO

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente com a aplicação dos teoremas da Secção 5.1. E então, faz-se necessário aprender certas técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas. Nesta secção discutiremos técnicas que requerem a *regra da cadeia para a antidiferenciação* e aquelas que envolvem uma mudança de variável.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ aplicamos a regra da cadeia para a diferenciação e obtemos

$$D_x[\tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10}] = (1 + x^2)^9(2x)$$