



Cálculo 1

Prof. Dr. Paulo Alexandre Oliveira

Engenharia de Alimentos | UFT | Palmas - TO

Resumo Geral

Assuntos do semestre

UNIVERSIDADE FEDERAL
DO TOCANTINS



- 1. Plano da disciplina**
- 2. Revisão rápida**
- 3. Limites**
- 4. Derivadas**
- 5. Integrais**

Revisão rápida

- 1. Funções (conjuntos)**
- 2. Produtos notáveis**
- 3. Fatoração/racionalização**
- 4. Divisão algébrica**
- 5. Trigonometria**

Revisão: Conjuntos Numéricos

1 NATURAIS ($\mathbb{N}$)

Conjunto dos números usados para contar.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Exemplos:

- 0
- 1
- 10
- 25
- 100
- ...



Observação: em alguns contextos, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

2 INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

Conjunto dos números naturais, seus opostos e o zero.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Exemplos:

- -7
- -1
- 0
- 4
- 12
- ...



Todo natural é inteiro:
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3 RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

Conjunto dos números que podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Exemplos:

- $\frac{1}{2} = 0,5$
- $-\frac{3}{4} = -0,75$
- $\frac{6}{3} = 2$
- $-5 = -\frac{5}{1}$
- $0 = \frac{0}{7}$
- ...



Todo inteiro é racional:
 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Revisão: Conjuntos Numéricos

4 IRRACIONAIS ($\mathbb{I}$)

Números reais que não podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Exemplos:

- $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$
- $\pi = 3,14159265\dots$
- $e = 2,71828182\dots$
- $\sqrt{5} = 2,23606797\dots$
- $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$
- ...



Decimais não periódicos e não terminantes.

5 REAIS ($\mathbb{R}$)

Conjunto de todos os números que podem ser representados na reta numérica. É a união dos racionais com os irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

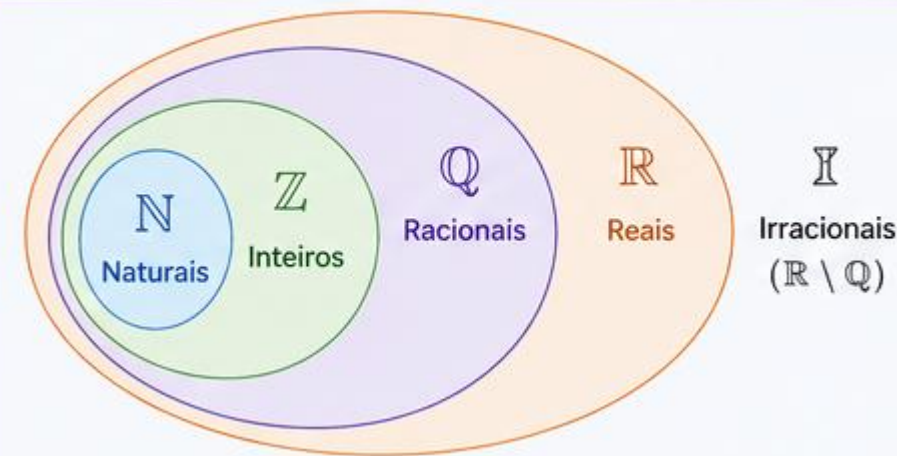
Exemplos:

- $-\frac{5}{2} = -2,5$ (racional)
- $3,14 = \frac{157}{50}$ (racional)
- $\sqrt{3} = 1,73205\dots$ (irracional)
- π (irracional)
- 0 (racional)
- ...



$\mathbb{R}$ é um conjunto contínuo: entre dois reais existem infinitos reais.

INCLUSÃO ENTRE OS CONJUNTOS



Revisão: Conjuntos Numéricos



OBSERVAÇÃO 1 – OPERAÇÕES EM $\mathbb{Q}$ (FRAÇÕES)

Soma	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b, d \neq 0$
Subtração	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \quad b, d \neq 0$
Multiplicação	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b, d \neq 0$
Divisão	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b, c, d \neq 0$
Exemplo	$\frac{2}{3} + \frac{-1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

OBSERVAÇÃO 2 – NÚMEROS COMPLEXOS ($\mathbb{C}$)



Além dos números reais, existem os números complexos, da forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$).

Os números complexos ampliam o conjunto real ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) e possuem muitas aplicações importantes na Matemática e na Engenharia.



Estudo de números complexos não é objeto deste curso.



Revisão - Funções

1 NOTAÇÃO E DIAGRAMA DE VEEN

- Uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento de B .

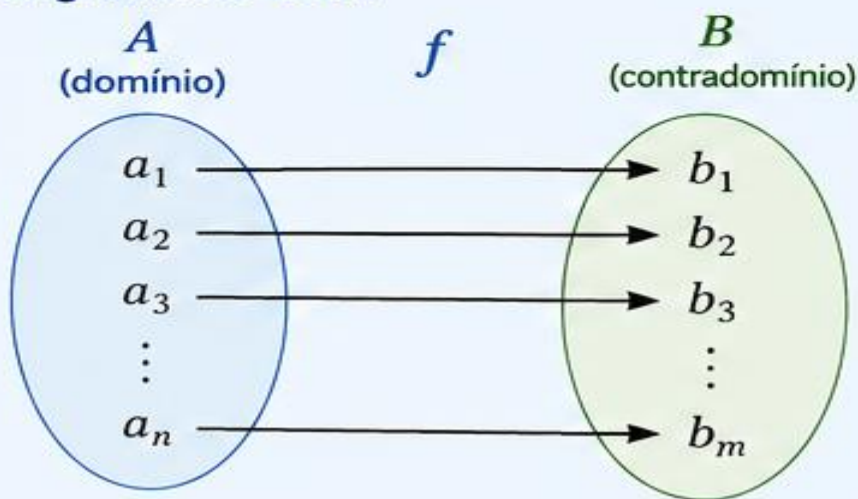
- Notação:

$$f : A \rightarrow B \quad (\text{lê-se: } f \text{ de } A \text{ em } B)$$

$$x \mapsto f(x) \quad \text{ou} \quad y = f(x)$$

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$$

- Diagrama de Veen:



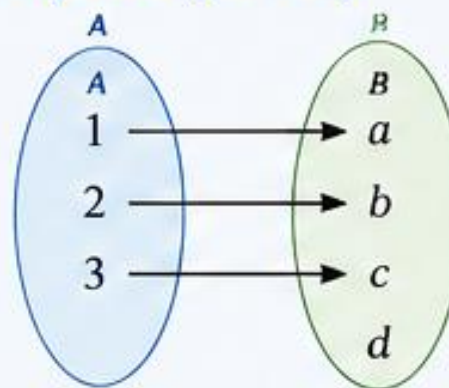
Domínio (A): conjunto de partida.

Contradomínio (B): conjunto de chegada.

Imagem ($\text{Im } f$): subconjunto de B formado pelos valores que são atingidos por f .

2 CLASSIFICAÇÃO DAS FUNÇÕES

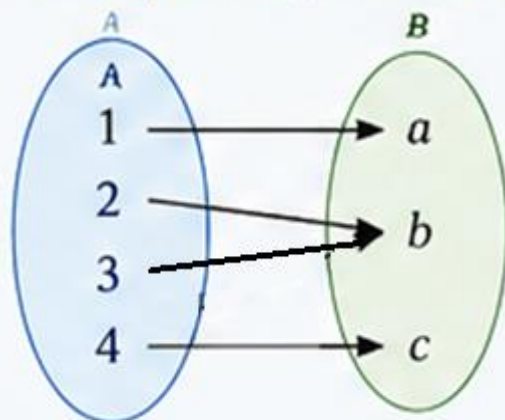
- Injetiva (ou 1-1)



Elementos distintos de A têm imagens distintas em B .

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

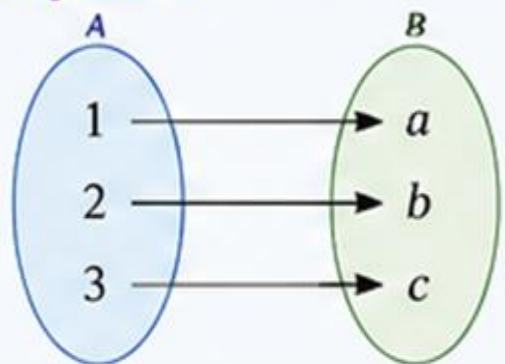
• Sobrejetiva (ou sobre)



Todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A .

$$\text{Im } f = B$$

• Bijetiva



É injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

$$\Leftrightarrow \text{Possui inversa}$$

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

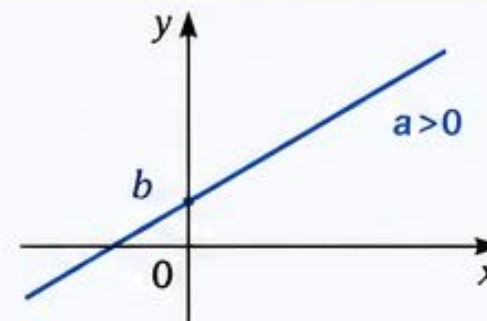
3 TIPOS DE FUNÇÃO

• Função Linear

$$f(x) = ax + b$$

Gráfico: reta.

a é o coeficiente angular (inclinação).

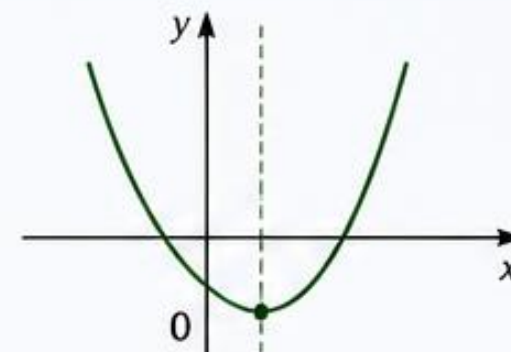


• Função Quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Gráfico: parábola.

Vértice, concavidade e raízes dependem dos coeficientes.



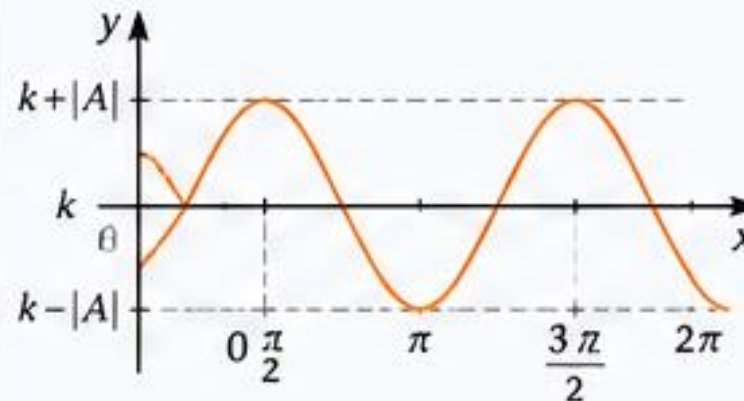
Revisão: Funções

• Função Seno

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + k$$

Gráfico: senoide.

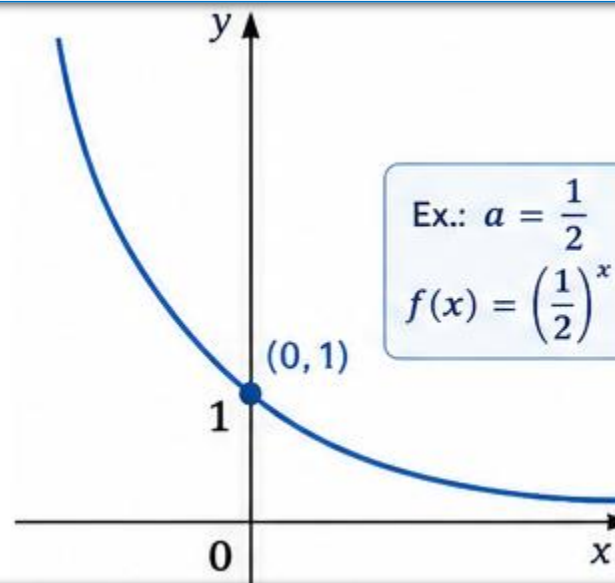
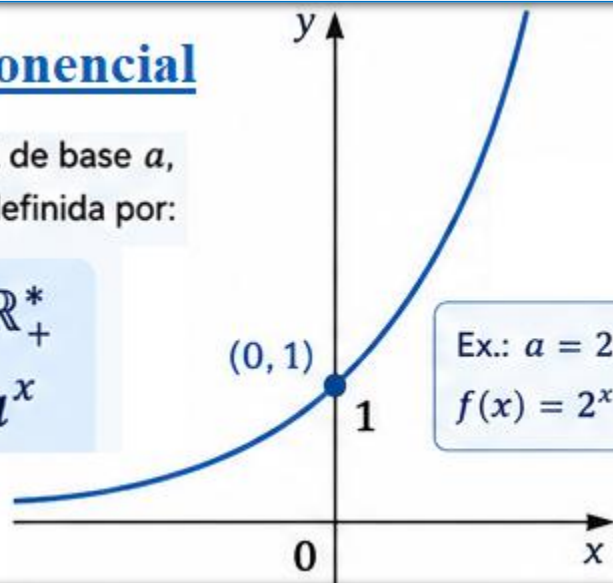
Amplitude $|A|$, período $T = \frac{2\pi}{\omega}$,
deslocamento vertical k .



Função Exponencial

A função exponencial de base a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, é definida por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$f(x) = a^x$$



APLICAÇÕES



Crescimento populacional



Juros compostos



Radioatividade (decaimento)



Propagação de doenças



Ciências da computação

1 FUNÇÃO LINEAR

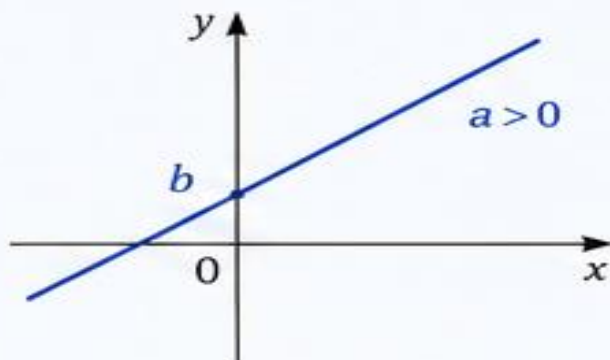
$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

Domínio: $\mathbb{R}$ Imagem: $\mathbb{R}$

Características:

- Reta não vertical.
- a é o coeficiente angular (inclinação).
- b é o coeficiente linear (intercepto em y).

Gráfico:



2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

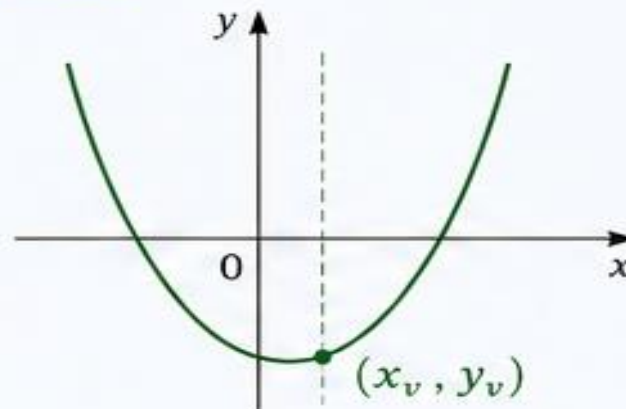
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Domínio: $\mathbb{R}$ Imagem: $[y_v, \infty)$
se $a > 0$ ou $(-\infty, y_v]$ se $a < 0$

Características:

- Parábola.
- Vértice: $x_v = -\frac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$.
- Concavidade para cima se $a > 0$, para baixo se $a < 0$.

Gráfico:



4 FUNÇÃO SENO

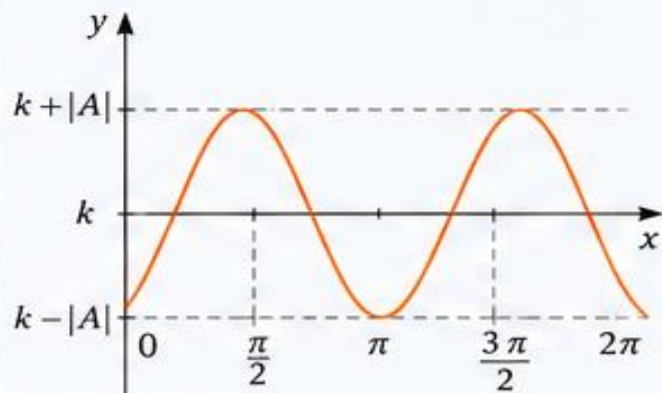
$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + k$$

Domínio: $\mathbb{R}$ Imagem: $[k - |A|, k + |A|]$

Características:

- Função periódica.
- Amplitude: $|A|$.
- Período: $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$,
- Deslocamento vertical: k .

Gráfico:



5 FUNÇÃO RACIONAL

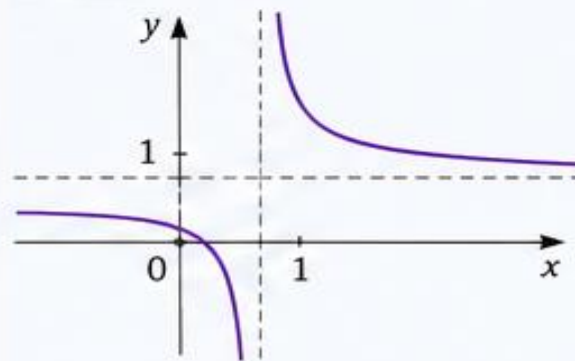
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ Imagem: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Características:

- Assíntota vertical: onde o denominador é zero ($x = 1$).
- Assíntota horizontal: razão dos coeficientes líderes ($y = 1$).

Gráfico:



Revisão: Produtos notáveis

NOME	FÓRMULA	EXEMPLOS
Quadrado da soma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	• $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ • $(2a + 5)^2 = 4a^2 + 20a + 25$
Quadrado da diferença	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	• $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ • $(3a - 2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$
Produto da soma pela diferença	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	• $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$ • $(2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$



LEMBRE-SE

Estes padrões aparecem com frequência em problemas de Álgebra, Cálculo e outras áreas da Matemática. Dominar os produtos notáveis facilita muito a resolução de exercícios!

Revisão: Produtos notáveis

FÓRMULA	EXEMPLOS
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	• $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ • $(2a + b)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	• $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ • $(3a - 2b)^3 = 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	• $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ • $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	• $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ • $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

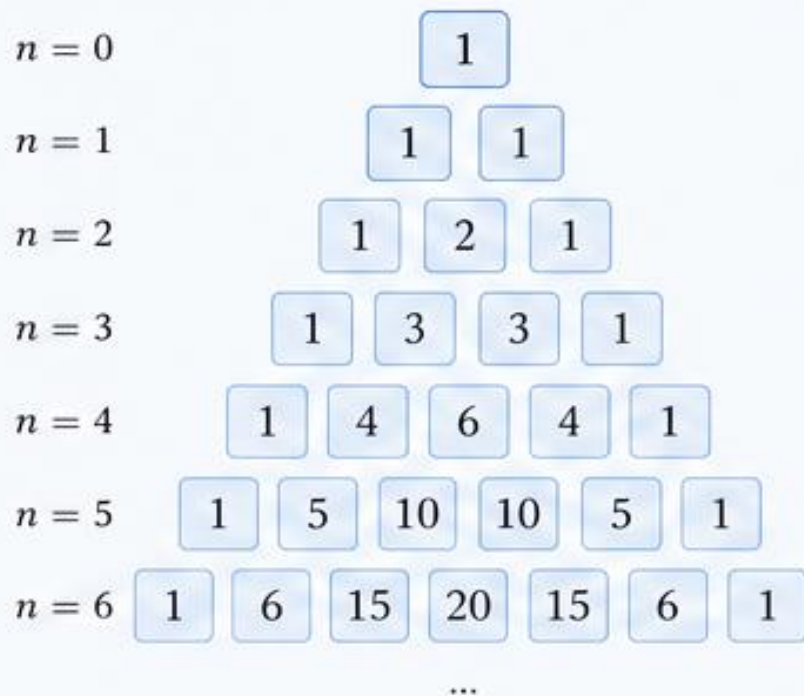


LEMBRE-SE

Estes padrões aparecem com frequência em problemas de Álgebra, Cálculo e outras áreas da Matemática. Dominar os produtos notáveis facilita muito a resolução de exercícios!

1 TRIÂNGULO DE PASCAL

Cada número é a soma dos dois números acima dele.



Propriedades importantes

- ★ Nas extremidades: 1.
- ★ Cada linha n (começando em $n = 0$) tem $n + 1$ números.
- ★ A soma dos números da linha n é 2^n .
- ★ Os números da linha n são os coeficientes binomiais: $\binom{n}{k}$.

2 FÓRMULA GERAL – BINÔMIO DE NEWTON

Para todo número natural n ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

é o coeficiente binomial
(número da linha n , posição k).

Interpretação dos termos

- $\binom{n}{k}$: coeficiente do termo
- a^{n-k} : potência de a decrescente
- b^k : potência de b crescente
- $k = 0, 1, 2, \dots, n$



Revisão: Binômio de Newton

Exemplo 1 – Grau 4

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 \\ + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4$$

Usando a linha $n = 4$:

1

4

6

4

1

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Revisão: Binômio de Newton

Exemplo 2 – Grau 5

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 \\ + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5$$

Usando a linha $n = 5$:

1

5

10

10

5

1

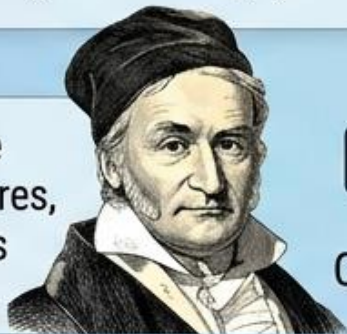
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Revisão: Fatoração polinomial

1) FATORAÇÃO GENÉRICA (Método de Gauss / Raízes)

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \rightarrow P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Todo polinômio de grau n pode ser fatorado em n fatores lineares, onde $r_1, r_2, \dots, r_n$ são suas raízes complexas.



$\boxed{n}$ $\sqrt{x}$ 
Carl Friedrich Gauss

$\boxed{n} \gg x$

2) EXEMPLOS DE FATORAÇÃO

EXEMPLO 1: GRAU 2

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$



- **Raízes:** 2, 3 (via Soma e Produto)
- **Fatoração:** $(x - 2)(x - 3)$

EXEMPLO 2: GRAU 3

$$Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$



- **Pesquisa de Raízes Racionais:**
Tenta-se $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- Descobre-se a raiz $x = 2$
- Divide-se $Q(x)$ por $(x - 2)$ e descobre-se:
 $Q(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$

3) EXEMPLO DE DIVISÃO (MÉTODO DA CHAVE)

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 2)$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \overline{) x^3 - 4x^2 + x + 6} \rightarrow 1. x^3 \div x = x^2 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \end{array}$$

$$-2x^2 + x \rightarrow 2. -2x^2 \div x = -2x$$

$$\underline{-(-2x^2 + 4x)}$$

$$-3x + 6 \rightarrow 3. -3x \div x = -3$$

$$\underline{-(-3x + 6)}$$

0 (Resto)

Cociente $q(x) = x^2 - 2x - 3$,
Resto $r = 0$

Revisão: Racionalização

CASO 1: RAÍZ QUADRADA SOZINHA NO DENOMINADOR

$$\frac{A}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{A \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{A\sqrt{x}}{x} \quad \sqrt{x}$$

Multiplica-se numerador e denominador pela mesma raiz quadrada.

Conjugado:

Conjugado:

$$\sqrt{x} + A \rightarrow \sqrt{x} - A$$

$$\sqrt{x} - A \rightarrow \sqrt{x} + A$$

$$\begin{matrix} \sqrt{x} + A \\ \sqrt{x} - A \end{matrix}$$

EXEMPLO 1:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



Cociente: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, **Resto** $r = 0$
(como em <0>)

EXEMPLO 2:

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{2} + 1} &= \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 5\sqrt{2} - 5 \end{aligned}$$



CASO 2: RAÍZ QUADRADA SOMADA/ SUBTRAÍDA NO DENOMINADOR

$$\begin{aligned} \frac{C}{\sqrt{x} + A} &\rightarrow \frac{C(\sqrt{x} - A)}{(\sqrt{x} + A)(\sqrt{x} - A)} \\ &= \frac{C(\sqrt{x} - A)}{x - A^2} \end{aligned}$$

EXEMPLO:

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{2} + 1} &= \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{1} \\ &= 5\sqrt{2} - 5 \end{aligned}$$



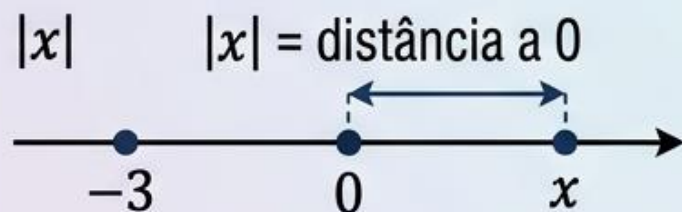
Revisão: Módulo

DEFINIÇÃO MATEMÁTICA

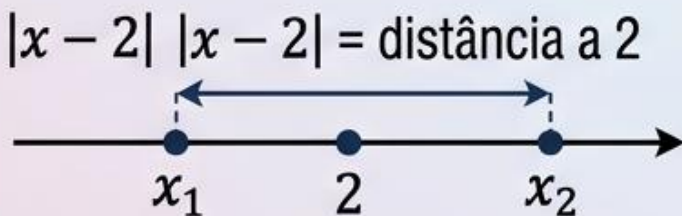
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$


$$|5| = 5$$
$$|-5| = -(-5) = 5$$

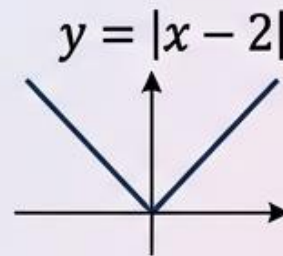

ASSOCIAÇÃO COM DISTÂNCIA (x - a)



Exemplo: $|x| = 3$



$|x - a|$ representa a distância de x ao ponto a .



EXEMPLOS DE MÓDULOS SIMPLES

$$|5| = 5$$

$$|\pi| = \pi$$

$$|0| = 0$$
$$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$|2x - 4| = 6$$

$$\begin{array}{ccc} 2x - 4 = 6 & \text{OU} & 2x - 4 = -6 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2x = 10 & \text{OU} & 2x = -2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x = 5 & \text{OU} & x = -1 \end{array}$$

Conjunto Solução: $S = \{-1, 5\}$



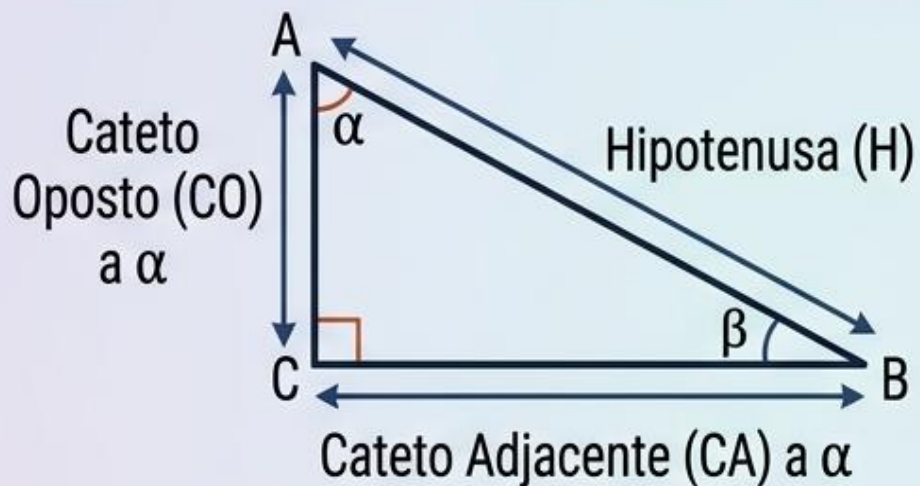
Verificação:

$$|2(5) - 4| = |6| = 6 \text{ (Ok)}$$

$$|2(-1) - 4| = |-6| = 6 \text{ (Ok)}$$

Revisão: Trigonometria

1) O TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS LADOS



2) AS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS (Seno e Cosseno)

- $\text{sen}(\alpha) = \frac{CO}{H}, \quad \text{cos}(\alpha) = \frac{CA}{H}$
- $\text{sen}(\beta) = \frac{CA}{H}, \quad \text{cos}(\beta) = \frac{CO}{H}$
- $\text{cos}(\alpha) = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$



3) OUTRAS RELAÇÕES (Secante, Cossecante, Cotangente)

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} \quad \text{csc}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{H}{CO}$$
$$\text{sec}(\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{H}{CA} \quad \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{CA}{CO} = \frac{\text{cos}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$$

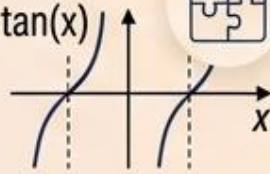

4) AS PRINCIPAIS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

• **Relação Pitagórica Fund.:** $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$

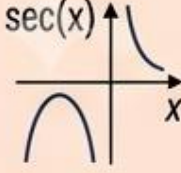
Verificação:


$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\alpha) + \\ &= \text{cos}^2(\alpha) = 1 \\ &= \text{sen}^2(\alpha) \\ &= \text{cotg}(\alpha) \end{aligned}$$

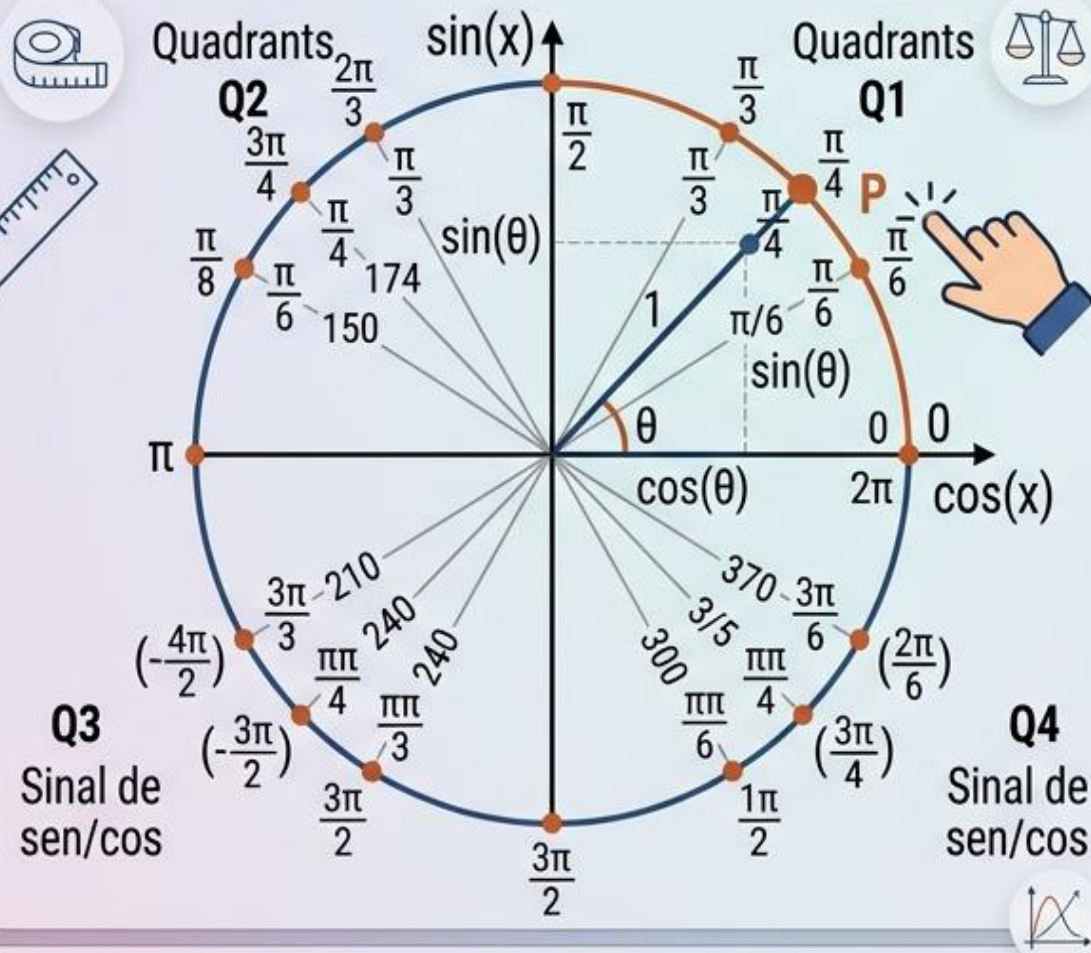
• **Identidades Recíprocas:**

$$\text{sec}(\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(\alpha)}, \quad \text{csc}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}, \quad \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$


• **Identidades de Divisão:**

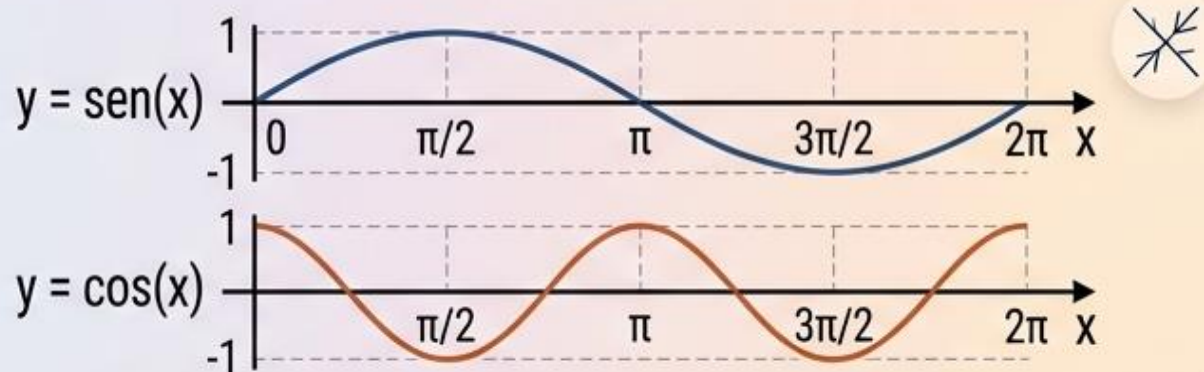
$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}, \quad \text{cotg}(\alpha) = \frac{\text{cos}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$$


1) CICLO TRIGONOMÉTRICO



Propriedades: Raio = 1; $\sin(\theta)$ no eixo-y, $\cos(\theta)$ no eixo-x

2) GRÁFICOS DAS FUNÇÕES



3) RELAÇÕES DE CONVERSÕES ENTRE QUADRANTES

• Relação de Ângulos (Radianos)

Q1 $\leftrightarrow$ Q2: $\pi - \theta$
Q2 $\leftrightarrow$ Q1: $\pi - \theta$



Q3 $\leftrightarrow$ Q4: $2\pi - \theta$
Q4 $\leftrightarrow$ Q3: $2\pi - \theta$

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta) \\ \cos(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta) \end{aligned}$$

• Identidades Trigonômicas de Divisão/Recíprocas:

$$\operatorname{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}, \quad \operatorname{cotg}(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$$

Identidades Trigonômicas:

$$\sec(a) = \frac{1}{\cos(a)}, \quad \csc(a) = \frac{1}{\sin(a)}, \quad \operatorname{cotg}(a) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a)}$$