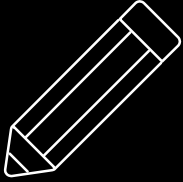
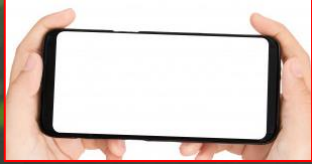


Aula 1 – 2º bim



CÁLCULO 1

ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

Cálculo I – Prof. Paulo Alexandre - Eng. de Alimentos – UFT – Palmas/TO

Aula 1 – 2º bim.

- 1. Derivadas: introdução**
- 2. Derivadas - teoremas;**
- 3. Exemplos**

DERIVADA - DEFINIÇÃO

A **derivada** de uma função f é a função denotada por f' , tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

se esse limite existir.

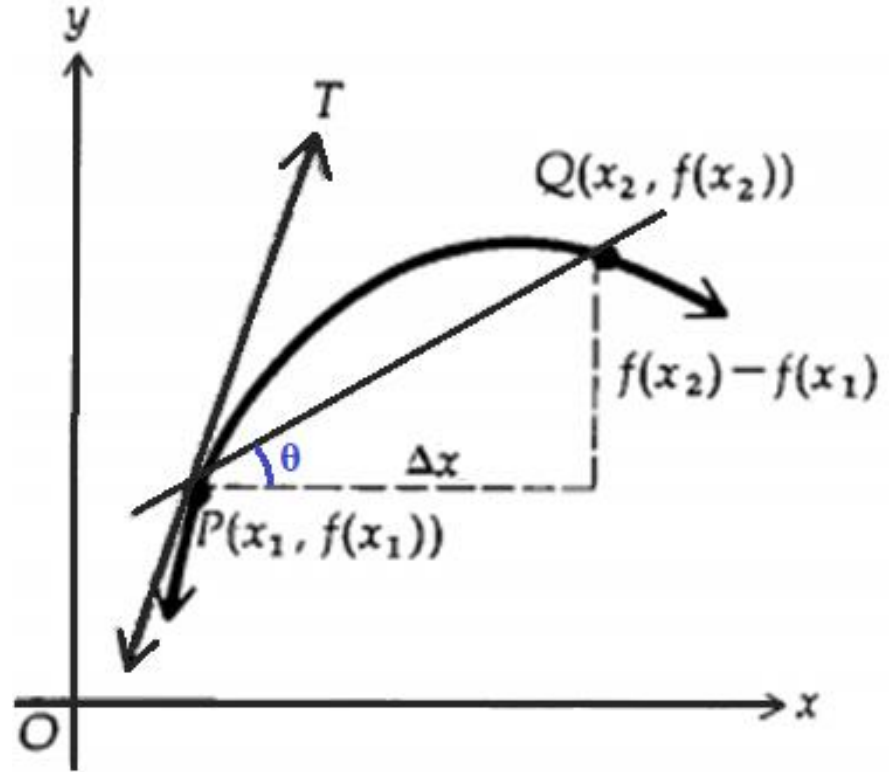
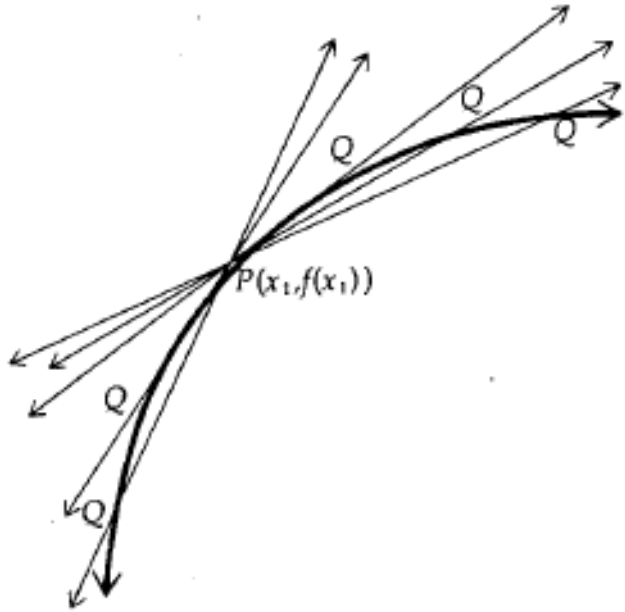
DERIVADA NO PONTO x_1 :

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Veja o Applet: <https://www.geogebra.org/m/NNnd6y4H>



DERIVADA – Interpretação Gráfica



T : reta tangente em x_1

$$\Delta x \rightarrow 0: m = \operatorname{tg}(\theta) = f'(x_1)$$

Derivada: Notações

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$p'(t) = \frac{dp}{dt}$$

$$D_x y \quad D_t p$$

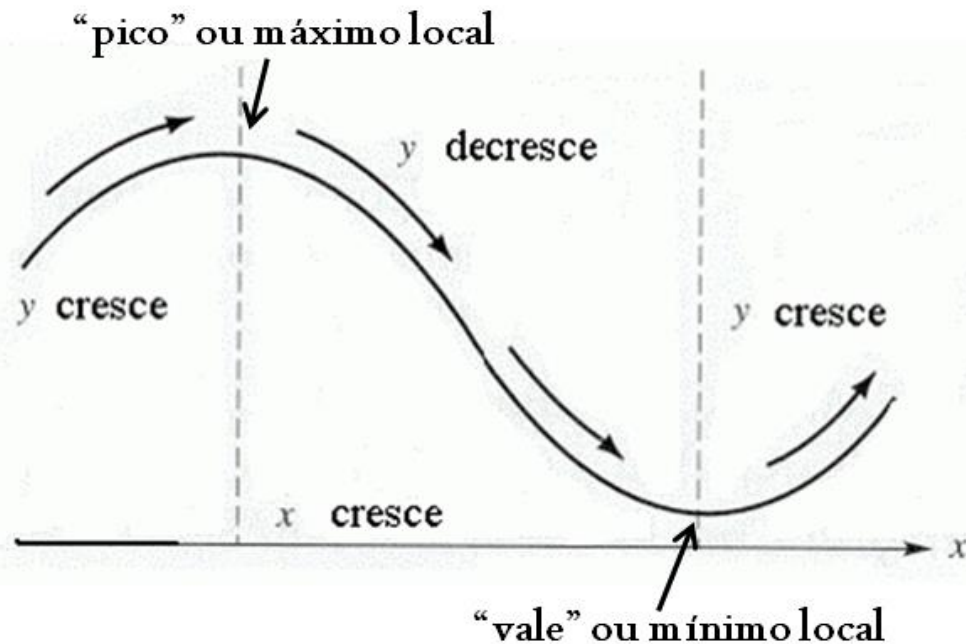
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Applet: <https://www.geogebra.org/m/WqGED5tn>



Derivada: Aplicações



As derivadas são aplicadas na:

- Física
- Química
- Engenharias
- Biologia
- Economia
- Outras

Applet: <https://www.geogebra.org/m/WqGED5tn>

DERIVADA – Exemplo resolvido

Ache a derivada de f se $f(x) = 3x^2 + 12$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x \Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3 \Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$



DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se uma função f for derivável em x_1 , então f será contínua em x_1 .

Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x_1 então
 $f'(x) = 0$

Prova

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

$$D_x(c) = 0$$

Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

então, se $f'(x)$ existir,

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$D_x [c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$$

$$D_x(cx^n) = cnx^{n-1}$$

DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Se f e g forem funções e h for a função definida por

$$h(x) = f(x)g(x)$$

então, se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, $D_x [f(x)g(x)] = f(x) D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$



DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{onde } g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$D_x \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$



DERIVADA: TEOREMAS E PROPRIEDADES

Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Se r for um inteiro qualquer positivo ou negativo,

$$D_x (x^r) = rx^{r-1}$$

$$D_x (cx^r) = crx^{r-1}$$



Derivada: Reta Tangente

Se $y = f(x)$, para no $P = (a, f(a))$ temos a reta tangente:

$$t: y - f(a) = m(x - a)$$

$$m = f'(a)$$



DERIVADAS EXERCÍCIOS

1. $f(x) = 7x - 5$

3. $g(x) = 1 - 2x - x^2$

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

7. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$

9. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$

11. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

13. $F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

15. $g(x) = 4x^4 - \frac{1}{4x^4}$

16. $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}$

17. $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}$

19. $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$

21. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

2. $g(x) = 8 - 3x$

4. $f(x) = 4x^2 + x + 1$

6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$

8. $g(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3 - 7x$

10. $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

12. $G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$

14. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}$

18. $H(x) = \frac{5}{6x^5}$

20. $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$

22. $f(x) = (4x^2 + 3)^2$

23. $G(y) = (7 - 3y^3)^2$

24. $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)]$

27. $D_x\left(\frac{x}{x-1}\right)$

29. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$

31. $\frac{d}{dt}\left(\frac{5t}{1 + 2t^2}\right)$

33. $\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right)$

26. $D_x\left(\frac{2x}{x+3}\right)$

28. $D_y\left(\frac{2y+1}{3y+4}\right)$

30. $\frac{d}{dx}\left(\frac{4 - 3x - x^2}{x - 2}\right)$

32. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}\right)$

34. $\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}\right)$

DERIVADAS EXERCÍCIOS

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad f(x) &= 7x - 5 \\ f'(x) &= 7 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 0 \\ f'(x) &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \quad f(x) &= 3x^4 - 5x^2 + 1 \\ f'(x) &= 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} - 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 \\ f'(x) &= 12x^3 - 10x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{24} \quad F(t) &= (t^3 - 2t + 1) \cdot (2t^2 + 3t) \\ (*) \quad F(t) &= a(t) \cdot b(t) \Rightarrow F'(t) = a'(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot b'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{i} \quad a(t) &= t^3 - 2t + 1 & \textcircled{ii} \quad b(t) &= 2t^2 + 3t \\ a'(t) &= 3t^2 - 2 & b'(t) &= 6t + 3\end{aligned}$$

SUBSTITUINDO EM (*)

$$\begin{aligned}F'(t) &= (3t^2 - 2) \cdot (2t^2 + 3t) + (t^3 - 2t + 1) \cdot (6t + 3) \\ F'(t) &= 10t^4 + 12t^3 - 12t^2 - 8t + 3\end{aligned}$$

FAÇA AS
CONTAS

$$\textcircled{19} \quad f(x) = \sqrt{3} (x^3 - x^2)$$

$$f(x) = \sqrt{3} x^3 - \sqrt{3} x^2$$

$$f'(x) = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot x^2 - \sqrt{3} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \sqrt{3} \cdot (3x^2 - 2x)$$

$$\textcircled{34} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \right)$$

MUDANDO
A NOTAÇÃO

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} = \frac{n(x)}{d(x)}$$

$$(*) \quad f'(x) = \frac{n'(x) \cdot d(x) - n(x) \cdot d'(x)}{[d(x)]^2}$$

$$\textcircled{i} \quad n(x) = x^2 - a^2 \quad (a = \text{const})$$

$$n'(x) = 2x - 0$$

$$\textcircled{ii} \quad d(x) = x^2 + a^2$$

$$d'(x) = 2x + 0$$

SUBST. EM (*):

$$f'(x) = \frac{(2x) \cdot (x^2 + a^2) - (x^2 - a^2) \cdot (2x)}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x (\cancel{x^2 + a^2} - \cancel{x^2 + a^2})}{x^4 + 2x^2a^2 + a^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2a^2)}{x^4 + 2x^2a^2 + a^4}$$

$$f'(x) = \frac{4xa^2}{x^4 + 2x^2a^2 + a^4}$$

Seja $y = f(x)$ abaixo, calcule a reta tangente em $P = (2, f(2))$:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{1}{3}$$

RESP

$$\begin{aligned} (*) &: y - f(2) = m(x - 2) \\ m &= f'(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{i} \quad f(2) &= \frac{2^3}{3} - 3 \cdot (2) + \frac{1}{3} \\ f(2) &= \frac{8}{3} - 6 + \frac{1}{3} \\ f(2) &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{ii} \quad f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 3 + 0 \\ f'(x) &= x^2 - 3 \\ f'(2) &= 2^2 - 3 = 4 - 3 \\ f'(2) &= 1 \Rightarrow m = 1 \\ \text{SUBST. EM (*)} &: \\ y - (-3) &= 1(x - 2) \\ y &= x - 2 - 3 \\ y &= x - 5 \end{aligned}$$

Eq DA
RETA TANG.
EM $P(2, -3)$

Até a próxima aula!



Ref faça os exercícios! 😊



Leia o material sugerido (Livro e artigos)!



Busque mais informações por sua conta!



Faça os exercícios propostos o quanto antes!